ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 19 MARS 1917.

PRÉSIDENCE DE M. A. D'ARSONVAL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Valeurs approchées de quelques intégrales définies.* Note de M. **Maurice Hamy.**

J'ai donné, dans une récente Communication [1], une expression approchée de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\,\frac{\sin^2 mu}{u^2}\,du,$$

m désignant un nombre très élevé quelconque. La valeur obtenue, complétée par l'addition d'un terme calculé par les moyens que j'ai indiqués, est la suivante :

$$I = \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\sqrt{\pi}}{4m^{\frac{3}{2}}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2m\right) + \frac{21}{16m}\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2m\right) + \ldots\right],$$

le produit par $m^{\frac{7}{2}}$, des termes négligés, restant fini lorsque m augmente indéfiniment.

Les recherches particulières, sur la diffraction des images des disques circulaires, qui m'ont conduit à évaluer I, m'ont en outre amené à étudier les intégrales

$$M = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\left[\frac{\sin m(u-1)}{u-1}\right]^2 du,$$

$$N = \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{\sin m(u-1)}{u-1}\right]^2 du,$$

$$P = \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{d}{du}\left[\frac{\sin m(u-1)}{u-1}\right]^2 du.$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 68.

Je me propose d'indiquer ici la voie suivie pour les calculer avec une faible erreur relative.

1° On peut écrire

$$M=\int_{-1}^{+1}[\sin m(u-1)]^2\, d\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}-\arc\sin u\right]\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<\arc\sin u<\frac{\pi}{2}\right)$$

ou, en intégrant par parties,

$$M=-\frac{\pi}{2}\sin^2 2m-m\int_{-1}^{+1}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}-\arc\sin u\right]\sin 2m(u-1)\,du.$$

L'intégrale placée dans le second membre est la partie réelle du coefficient de $i=\sqrt{-1}$, dans la suivante,

$$J=\int_{-1}^{+1}f(u)\,E^{i2m(u-1)}\,du,$$

en posant

$$f(u)=2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}-\arc\sin u.$$

Par le point $u=-1$ du plan de la variable u, considérée comme complexe, menons une ordonnée positive c' allant jusqu'à l'infini et, par le point $u=+1$, une autre ordonnée positive c'' s'étendant également indéfiniment.

$|E^{i(u-1)}|$ étant nul à une distance positive infinie de l'axe des abscisses, on peut écrire

$$J=\int_{c'}-\int_{c''},$$

en convenant de partir des points $u=-1$ et $u=+1$ respectivement sur chacun des chemins c' et c''. On a d'ailleurs identiquement

$$\int_{c'}f(u)\,E^{i2m(u-1)}\,du=\quad i\frac{\pi}{4m}E^{-4mi}+\int_{c'}\left[f(u)-\frac{\pi}{2}\right]E^{i2m(u-1)}\,du,$$

$$\int_{c''}(fu)\,E^{i2m(u-1)}\,du=-i\frac{\pi}{4m}\qquad+\int_{c''}\left[f(u)+\frac{\pi}{2}\right]E^{i2m(u-1)}\,du,$$

$|E^{i(u-1)}|$ prenant sa plus grande valeur à l'extrémité $u=+1$, sur le contour c'', et à l'extrémité $u=-1$ sur le contour c', on se trouve ramené, pour évaluer les deux intégrales figurant aux seconds membres de ces égalités, à appliquer la formule (41), établie dans mon Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres [1]. A cet effet, il faut partir des

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1908, p. 252.

développements des fonctions accompagnant le facteur $E^{i2m(u-1)}$ sous les signes $\int$. Or on a, dans le voisinage du point $u = +1$, le long du contour c',

$$f(u) - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

et, dans le voisinage du point $u = 1$, le long du contour c'',

$$f(u) + \frac{\pi}{2} = (u-1)^{\frac{1}{2}}\left[2i\sqrt{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}(u-1) + \ldots\right],$$

les binomes $u+1$ et $u-1$ étant affectés chacun de leur plus petit argument positif. On déduit de là

$$\int_{c'}\left[f(u) - \frac{\pi}{2}\right]E^{i2m(u-1)}\,du = -\frac{\sqrt{\pi}}{32\,m^{\frac{5}{2}}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4m\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - 4m\right)\right] + \ldots,$$

le produit des termes négligés, par $m^{\frac{7}{2}}$, restant fini lorsque m augmente indéfiniment. De même

$$\int_{c''}\left[f(u) + \frac{\pi}{2}\right]E^{i2m(u-1)}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}\left[-2 + \frac{1}{8m} + \ldots\right] + i\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}}\left[2 + \frac{1}{8m} + \ldots\right],$$

le produit des termes négligés, par $m^{\frac{5}{2}}$, restant fini lorsque m croît indéfiniment. De ces égalités on tire

$$M = \sqrt{2\pi m} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8\sqrt{2\pi m}} + \ldots,$$

le produit des termes négligés, par $m^{\frac{3}{2}}$, restant fini lorsque m croît indéfiniment.

2° La valeur de N s'obtient en écrivant

$$N = \frac{1}{3}\int_{-1}^{+1}[\sin m(u-1)]^2\,d\left[\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2} - 2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}\right].$$

Intégrant par parties, on déduit de là

$$N = -\frac{m}{3}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2}\sin 2m(u-1)\,du + \frac{2m}{3}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}\sin 2m(u-1)\,du.$$

Observant que

$$\frac{\sqrt{1-u^2}}{(1-u)^2} = \frac{d}{du}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \arcsin u\right],$$

on arrive après une nouvelle intégration par parties à l'expression

$$N = m\frac{\pi}{6}\sin 4m - \frac{2m^2}{3}\int_{-1}^{+1}\left[2\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} - \text{arc}\sin u\right]\cos 2m(u-1)\,du$$
$$- \frac{2m}{3}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}\sin 2m(u-1)\,du.$$

La première intégrale figurant dans le second membre de cette égalité est la partie réelle de J. La seconde a pour valeur le coefficient de i dans la suivante,

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}}\,E^{i2m(u-1)}\,du.$$

On écrit, comme ci-dessus,

$$\int_{-1}^{+1} = \int_{c'} - \int_{c''}$$

et l'on applique la formule (41) de mon Mémoire (*loc. cit.*) à chacune des intégrales rentrant dans le second membre. A cet effet, on part, pour évaluer $\int_{c'}$, du développement

$$\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} = \sqrt{u+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}(u+1) + \ldots\right]$$

et, pour évaluer l'intégrale $\int_{c''}$, du développement

$$\frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u}} = (u-1)^{-\frac{1}{2}}\left[i\sqrt{2} + \frac{i\sqrt{2}}{4}(u-1) + \ldots\right],$$

les binomes $u+1$ et $u-1$ étant affectés chacun de leur plus petit argument positif. Finalement on trouve

$$N = \frac{2}{3}m\sqrt{2\pi m} - \frac{3}{8}\sqrt{2\pi m} + \ldots,$$

le produit par $\sqrt{2\pi m}$ des termes négligés, dans le second membre, restant fini lorsque m augmente indéfiniment.

3° L'intégrale P se ramène à une somme d'autres qui se traitent par des moyens analogues à ceux dont on vient de faire usage. Par des intégrations par parties successives, on s'arrange de façon que les éléments différentiels soient de la forme

$$F(u)\sin 2m(u-1)\,du \quad \text{ou} \quad F(u)\cos 2m(u-1)\,du,$$

le produit $(u-1)\mathrm{F}(u)$ tendant vers zéro lorsque u tend vers 1. On obtient

$$\mathrm{P}=m^2\sqrt{2\pi m}\left[\frac{4}{15}-\frac{1}{4}\frac{1}{m}+\ldots\right],$$

le produit par m^2, des termes négligés entre crochets, restant fini lorsque m croît indéfiniment.

On peut suivre une autre marche, pour évaluer I, M, N, P, en prenant ces intégrales, non plus le long de l'axe des abscisses, entre les limites $+1$ et -1, mais le long d'un contour fermé c, renfermant les points $u=+1$ et $u=-1$, parcouru dans le sens direct. La détermination du radical $\sqrt{1-u^2}$ qui figure sous les signes $\int$ étant celle qui a une valeur purement imaginaire positive, au point où le contour rencontre la partie positive de l'axe des abscisses, on démontre, en effet, que chacune des intégrales prise le long de c a une valeur double de celle qu'elle a entre les limites $+1$ et -1. On évite, par ce moyen, les intégrations par parties successives et l'on est conduit à évaluer des intégrales renfermant un facteur élevé à une haute puissance de la nature de celles que j'ai étudiées, pages 256 et suivantes, dans mon Mémoire déjà cité.

ASTRONOMIE. — *Sur l'emplacement et les coordonnées de quelques stations astronomiques de Paris, utilisées pendant la construction de l'Observatoire.* Note (¹) de M. G. Bigourdan.

Les astronomes de l'Académie des Sciences firent leurs premières observations à la bibliothèque de la rue Vivienne, parfois dans les bâtiments, mais le plus souvent dans le jardin, en plein air. Comme l'horizon n'y était pas assez dégagé, il devint presque aussitôt indispensable de transporter les instruments ailleurs, en attendant la construction et l'achèvement de l'Observatoire actuel, commencé en 1667, terminé en 1672.

C'est ainsi que lorsqu'il était nécessaire d'observer les astres jusqu'à leu coucher on se transportait au sommet de la colline de Montmartre.

D'autres lieux provisoires d'observation furent plus ou moins imposés par d'autres considérations, qui d'ailleurs nous échappent fréquemment : ainsi pendant quelque temps Picard observa à Passy, J.-D. Cassini à la Ville-l'Évêque, etc. C'est de ces premières stations temporaires que je me

(¹) Séance du 12 mars 1917.

suis proposé de déterminer les emplacements et les coordonnées, autant que le permettent les renseignements incomplets que j'ai pu réunir.

Passy. — Les données relatives à l'existence même de cette station astronomique sont assez contradictoires : l'*Histoire céleste* de Le Monnier (p. 3-4) indique, d'une manière assez vague, quelques mesures du diamètre de la Lune prises par Picard à Passy dans la première partie de 1666, c'est-à-dire avant la fondation de l'Académie; puis, à partir de juillet, ces mesures sont continuées par Picard à Passy et par Auzout à Paris. Mais le registre autographe de Picard (D, 1, 14, p. 31) donne toutes ses mesures de diamètres comme faites à la porte Montmartre ([1]). D'ailleurs l'*Histoire de l'Académie* de Fontenelle ne fait aucune mention de Passy. Toutefois on ne peut douter que Picard ait fait là un certain nombre de ces mesures, car les registres manuscrits de l'Académie ([2]) (*Reg.* I, p. 25) donnent comparativement, et comme d'une manière accidentelle, les valeurs obtenues à Passy et à Paris les 8, 9, 14, 15, 16, 22 et 23 juillet 1666 ([3]). Si l'on compare les diverses

([1]) Une petite différence de latitude n'ayant pas d'influence appréciable sur ces mesures de diamètres, il est possible que Picard ait jugé inutile de séparer les quelques observations faites à Passy.

([2]) Ces registres in-folio ($37^{cm} \times 24^{cm}$) sont numérotés I, II, III, ..., les numéros impairs étant ceux dits de « mathématiques » et les numéros pairs ceux de « physique ». Certains sont paginés page à page, d'autres folio par folio. Souvent les pages restées blanches ne sont pas numérotées.

([3]) Voici la comparaison des diamètres pour les mêmes dates, mais empruntés à diverses sources.

Dates. 1666.	D'après les registres de l'Académie. Paris. Heure.	Diamètre.	Passy. Heure.	Diamètre.	D'après le registre autographe de Picard. Porte de Montmartre. Heure.	Diamètre.	D'après l'*Histoire céleste* de Le Monnier. Passy. Heure.	Diamètre.	Paris. Heure.	Diamètre.
Juill. 8♃.	entre 8^h et 9^h	près de 33′	»	(*a*)	au soir	32′.40″	10^h soir	32′.40″	8^h-9^h soir	33′. 0″
9♀.	»	(*b*)	»	(*b*)	»	32.40	»	32.40	»	33. 0
14☿.	entre 9^h et 10^h	31.40	»	31.35 (*c*)	»	31.36	»	31.36	»	31.40
15♃.	Id.	(*d*)	»	31.22 (*e*)	»	31.22	»	31.22	»	{31.25 {33.30 (corr.)
16♀.	Id.	31.10	»	31. 8	»	31. 8	»	31. 8	»	31.10
22♃.	3^h matin	29.50	sur les 6^h	29.40	6^h matin	29.39	6^h matin	29.39	3^h matin	29.50
23♀.	9^h matin	29.50	»	plus grand	5^h matin	29.53	5^h matin	29.53	5^h matin	29.50

(*a*) Un peu plus petit qu'à Paris. « On en peut attribuer la cause à ce que l'observaōn s'est faite plus tard, et que la Lune pouvoit desia estre dans ses refractions ».

(*b*) « Le Vendredy 9. elle parut a Paris et à Passy de mesme grandeur que le jour precedent, aussy elle avoit esté dans son perigée entre le Jeudy et le Vendredy selon Kepler. »

(*c*) « Elle n'estoit pas entierement hors des refractions et pouvoit avoir 4. ou 5. secondes davantage. »

(*d*) 31′ et 25″ ou 26″; « mais à cause de quelque refraction on peut bien la supposer 31′.30″ ».

(*e*) « Mais la refraction peut l'avoir aussy diminüe de quelques secondes. »

sources dont nous disposons, on voit que les diamètres observés à Passy d'après les registres de l'Académie et d'après l'*Histoire céleste* de Le Monnier, sont ceux donnés comme obtenus à la Porte Montmartre par le registre autographe de Picard. Malgré ce désaccord l'existence de cette station astronomique paraît bien certaine; nous n'avons d'ailleurs aucune donnée, même approximative, sur sa position; peut-être l'adresse de quelque lettre viendra-t-elle la révéler, car il paraît probable que Picard habitait alors dans cette localité.

Galeries et Jardins du Louvre. — C'est là que furent faites sans doute les déterminations de latitude d'Aleaume, logé dans ces galeries.

Lors de son arrivée à Paris, J.-D. Cassini y fit aussi quelques observations :

Quand il n'y avait encore, dit-il [1], aucun endroit logeable dans l'Observatoire, je fis premièrement mes observations partie aux Galeries du Louvre où Mr Colbert avait fait accommoder à mon usage un appartement par le soin de Mr Perrault contrôleur des bâtiments du Roy, partie au Jardin de la Bibliothèque du Roy où estoit un grand quart de cercle, et vis à vis un Cadran à Soleil le plus grand et le plus exact qu'on eut vu à Paris tracé par M. Buot, et une méridienne tracée sur une bande de cuivre enchassée par une table de pierre et vérifiée exactement par M. Picard. L'aiguille aimantée n'en déclinait pas alors sensiblement. C'est un dommage qu'elle ait depuis été déplacée par le Jardinier.

D'après M. Wolf (*Hist. Obs.*, p. 2), à la même époque d'autres astronomes de l'Académie observèrent également dans les Galeries et les Jardins du Louvre. D'après la liste T_2 les coordonnées de la lanterne de ces galeries sont $104^T,9$O et $1363^T,0$N, d'où il résulte :

$$\Delta\mathcal{L} = 0'10'',03 = 0^m 0^s,670; \qquad \Delta\varphi = +1'26'',01; \qquad \varphi = +48°51'37'',0.$$

Ville l'Évêque. — Dans les premiers temps de son séjour à Paris, J.-D. Cassini fit là aussi quelques observations [2] :

J'étais à Paris en 1671, dit-il, avant que l'Observatoire fût en état d'être habité. En conséquence, pour pouvoir faire commodément quelques observations astronomiques, j'avais loué une maison et un jardin à la Ville-l'Évêque, peu éloignés de la porte

---

[1] J.-D. Cassini, *Notes sur l'Observatoire*, Manuscrit D, 1, 14.

[2] *J.-D. Cassini*, MÉMOIRES *pour servir à l'Histoire des Sciences et à celle de l'*OBSERVATOIRE ROYAL DE PARIS, suivis de la vie de *J.-D. Cassini*, écrite par lui-même, et des éloges de plusieurs académiciens.... Paris, 1810, in-4°, p. 304 (*Abrév.* Cass. IV, *Mém.*).

occidentale de Paris. J'y avais attiré dans une maison voisine M. *Couplet*, qui m'avait été donné pour aide. J'aperçus là, pour la première fois, des taches dans le soleil dont je fis la description qui fut envoyée au Roi à Fontainebleau. Par les observations de plusieurs jours, je déterminai la vitesse de leur mouvement apparent, dont j'établis une théorie qui me servit à prédire que ces taches retourneraient aux mêmes endroits du disque du soleil, après une révolution de 27 jours. Ceux qui les avaient observées après leur première apparition avaient jugé cette révolution à peu près d'un mois.

Ma prédiction ayant eu un heureux succès, M. *de Colbert* voulut observer ces taches dans son jardin. Cela lui donna lieu de presser vivement qu'on achevât l'appartement qui m'était destiné à l'Observatoire, où j'allai m'établir avant que les taches finissent de paraître, et où je fus suivi de M. *Couplet*....

Cassini avait fait ces observations avec un objectif de Campani qui lui avait servi à découvrir la rotation de Jupiter et celle de Mars. Aussi Colbert fit aussitôt écrire à cet opticien pour lui demander les plus puissantes lunettes qu'il pourrait construire.

D'après M. Wolf (*Hist. Obs.*, p. 168), il est probable que Sébastien Leclerc travailla aussi à la Ville-l'Évêque avec Cassini, aux dessins de la Lune.

La Ville-l'Évêque était hors les murs, dans le faubourg Saint-Honoré d'alors et sur le côté nord de la rue de ce nom. Quant à cette porte occidentale, elle se trouvait sur la rue Saint-Honoré, à peu près à l'intersection avec ce qui est aujourd'hui la rue Royale. Les coordonnées approximatives du point considéré sont donc 1000^{m} O et 3550^{m} N, d'où il résulte :

$$\Delta\mathfrak{L} = 0'49'',07 = 0^{m}3^{s},3\ \text{O}; \qquad \Delta\varphi = +1'54'',95; \qquad \varphi = +48^{\circ}52'6''.$$

Saint-Martin-des-Champs. — Avant de s'installer à l'Observatoire, Cassini observa aussi à l'abbaye Saint-Martin-des-Champs, aujourd'hui le Conservatoire des Arts et Métiers. On trouve, en effet, dit M. Wolf (*Hist. Obs.*, p. 65) en tête du volume de l'*Histoire céleste de Cassini IV pour* 1671 (*Arch. Obs.*, D, 5, 10) une feuille volante, de la main de Cassini I, intitulée :

Hauteurs méridiennes de plusieurs étoiles observées en 1671 *avec un octant de 6 pieds de Raïon dans l'Abbaïe de Saint-Martin-des-Champs, à Paris, au pied du clocher.*

Ces observations furent faites dans les mois d'août et de septembre.

D'après la Table T_2, la flèche du clocher se trouve $688^{T},3$ E et $1604^{T},1$ N. On peut donc adopter pour le point d'observation :

$$\Delta\mathfrak{L} = 1'5'',83 = 0^{m}4^{s},39\ \text{E}; \qquad \Delta\varphi = +1'46'',90; \qquad \varphi = +48^{\circ}51'57'',9.$$

Colline de Montmartre [1]. — Lorsqu'une observation exigeait un horizon complètement dégagé de divers côtés, les astronomes de Paris transportèrent parfois leurs instruments sur les tours de Notre-Dame (en 1646, 1649); et lorsque leur hauteur se trouvait insuffisante, ils s'installaient exceptionnellement au sommet de la colline de Montmartre.

C'est ce que firent les astronomes de l'Académie des Sciences pour l'éclipse de Lune du 16 juin 1666, qui d'ailleurs leur fut cachée par les nuages. Cette éclipse est la première qui suivit la fondation de cette Académie, et à Paris elle devait être horizontale, phénomène qui n'est pas rare, mais qui, en raison de son peu de durée, n'a pas été observé souvent et n'avait pas encore été vu à Paris.

Les mêmes astronomes observèrent également sur le haut de Montmartre l'éclipse de Lune du 25 mai 1668 [2] qui, dans la région de Paris, fut aussi presque horizontale. Aucune autre n'avait encore été observée avec tant de soins : les heures furent données par deux horloges à pendule, on mesura le diamètre de la Lune au micromètre, etc. Les résultats, comparés à ceux de J.-D. Cassini à Rome, donnèrent $0^h 41^m$ de différence de longitude : on admet aujourd'hui $0^h 40^m 36^s$.

Aussi songea-t-on naturellement à placer à Montmartre le futur Observatoire; mais on y renonça aussitôt en raison de la position au nord de la ville : presque constamment les fumées auraient beaucoup gêné, puisque dans nos régions les observations se font surtout du côté sud.

Quand on se transportait là, on devait se placer vers le point le plus élevé de la butte, celui dont les coordonnées sont approximativement

---

(1) Après l'achèvement de l'Observatoire, on choisit à l'horizon des points fixes dont on détermina les azimuts, et qui servaient à orienter et à vérifier les instruments. Deux de ces repères ou mires, qui étaient à l'Hay, paraissent avoir disparu depuis longtemps; ils avaient été rapportés quelquefois à la tour de Montlhéry.

D'autres mires, qui ont également disparu, avaient été placées sur le clocher des Chartreux, sur le palais du Luxembourg et sur la chapelle des Pères de l'Oratoire de la rue Saint-Honoré (C. Wolf, *Hist. Obs.*, p. 141).

Le clocher de Montmartre servit aussi au même but; enfin, en un autre point de Montmartre, plus occidental et moins élevé, au voisinage des moulins d'aujourd'hui, on employa comme repère successivement une cheminée, un pilier de bois, et enfin la pyramide de pierre qui existe encore, ceux-ci étant dans le méridien de l'Observatoire.

(2) *Journal des savants*, 1668, p. 69, reproduit dans *Anc. Mém. Acad.*, X, 331. On trouve de longs détails sur les préparatifs de cette observation et sur l'observation elle-même dans les registres manuscrits de l'Académie (*Reg.* III, fol. 23-25).

440^m E — 5625^m N, d'où il résulte :

$$\Delta\mathcal{L} = 0'21'',0 = 0^m 1^s,4 \text{ E}; \quad \Delta\varphi = +3'2'',1; \quad \varphi = +48^\circ 53' 13''.$$

Remarque. — En cherchant à déterminer la latitude de la station de la rue Vivienne (*Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 506), j'ai dit que, dans l'*Histoire* de l'Académie pour 1668, il faut lire, semble-t-il, *porte Montmartre* au lieu de porte Saint-Martin. Le registre manuscrit de l'Académie (*Reg.* III, fol. 166) plus explicite que l'*Histoire*, montre qu'il s'agit bien de la porte Saint-Martin. On y lit en effet sous la date du 14 novembre 1668 :

La distance entre la porte Sainct-Martin et celle de Sainct-Jacques, exactement mesurée par M. de Roberval, est de 1313. toises, qui à cause que la rue decline du midy vers le couchant d'environ de 25. degrez doibvent estre reductes à 1190 toises dont l'une de ces portes est plus meridionale que l'autre, ... mais la porte Sainct-Martin est plus septentrionale que le lieu de la Bibliothèque où l'observation a esté faicte d'environ 150 toises et par conséquent 10''....

Le plan de Gomboust (1652), qui montre en perspective les portes Saint-Jacques et Saint-Martin, ne permet pas de mesurer leur distance pour la comparer à celle trouvée par Roberval (1); d'ailleurs la porte dite de *Saint-Martin* a occupé successivement des emplacements différents, et la mesure de Roberval ne peut se rapporter à celle d'aujourd'hui, bâtie en 1674.

La porte Saint-Jacques dont il s'agit ici est celle de l'enceinte de Philippe-Auguste; et tous les plans s'accordent à lui attribuer toujours la même place : sa face intérieure était à $0^m,50$ au nord de la rue Soufflot (façade des maisons du côté Sud), comme le montre la plaque de marbre apposée rue Saint-Jacques pour en rappeler l'emplacement.

Si tous les nombres précédents étaient bien exacts, ils permettraient de fixer avec toute la précision désirable la latitude de l'Observatoire de la rue Vivienne. Mais au lieu de 25° la ligne droite qui joint les deux portes Saint-Jacques et Saint-Martin (et qui, d'ailleurs, suit sensiblement les rues qui vont de l'une à l'autre de ces portes) ne décline que de 21°, ce qui donnerait pour leur distance, comptée N-S, 1226^T au lieu de 1190^T. Retranchant les 150^T dont la porte Saint-Martin est plus boréale, il reste $1076^T = 2097^m$

(1) Une cause appréciable d'incertitude sur la distance trouvée par Roberval provient de la toise employée, que nous ne connaissons pas; alors la toise de Paris fut modifiée d'une quantité considérable. *Voir :* C. Wolf, *Recherches historiques sur les étalons de poids et mesures de l'Observatoire* [*de Paris*] (Mémoires, t. XVII, p. C. 11, note 2).

et $1040^T = 2027^m$. D'un autre côté la porte Saint-Jacques est à 1147^m au nord de l'Observatoire. Les nombres précédents placeraient donc la station de la rue Vivienne respectivement 3244^m et 3174^m au nord de l'Observatoire, nombres trop faibles l'un et l'autre, surtout le dernier. La donnée qui paraît surtout erronée est celle de 150^T, nombre qui doit être presque deux fois trop fort.

Si l'on s'en rapporte à l'*Histoire céleste* de Le Monnier (p. 12-13) les observations de hauteurs méridiennes du Soleil prises par Picard, du 2 janvier au 22 octobre 1668, auraient été obtenues à l'Observatoire de la porte Montmartre. Mais comme dans ce dernier Observatoire les instruments étaient abrités, les remarques de Picard rapportées au bas de la page 19 de la même *Histoire céleste* seraient contradictoires. Aussi m'avait-il paru probable que ces observations ont été faites rue Vivienne.

C'est ce que confirme également le fait que la plus petite fraction de minute est $\frac{1}{6}$ comme à la rue Vivienne, tandis que, dans les autres observations de la porte Montmartre, Picard donne la seconde d'arc. D'ailleurs ces observations ne se trouvent pas dans le registre autographe de Picard (D. 1, 14).

Comme l'*Histoire* de Fontenelle est muette à cet égard, j'ai consulté les registres manuscrits de l'Académie (*Reg*. III, fol. 145) et ils donnent explicitement ces observations comme faites à la Bibliothèque de la rue Vivienne.

Par contre, les mêmes registres (*Reg*. V, fol. 229, 232, 235) donnent comme faites à la Bibliothèque du Roy les observations de hauteurs méridiennes du Soleil prises du 20 mars au 14 novembre 1669 et les mesures de diamètres du Soleil prises du 22 octobre 1668 au 14 novembre 1669; mais ils donnent comme faites à la porte Montmartre, et avec le même instrument, les hauteurs méridiennes d'étoiles prises du 24 janvier 1668 au 24 août 1669.

Il me paraît certain que l'on doit considérer comme faites à la rue Vivienne les observations de hauteurs données en degrés, minutes et fractions de minute, et comme faites près de la porte Montmartre celle où les résultats sont donnés en degrés, minutes et secondes. Par suite, les observations de hauteurs méridiennes furent continuées à la rue Vivienne jusqu'en octobre 1668 et commencées près de la porte Montmartre au mois de novembre suivant.

GÉOLOGIE. — *A propos d'une récente publication de M. Maurice Lugeon.* Note de M. **Pierre Termier.**

M. Maurice Lugeon, professeur de Géologie à l'Université de Lausanne, m'a prié d'offrir à l'Académie un exemplaire du deuxième fascicule de son Mémoire intitulé : *Les Hautes Alpes calcaires entre la Lizerne et la Kander.* Ce fascicule, publié en 1916 dans les *Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse* (1), fait suite à un premier fascicule publié en 1914 et sommairement analysé par moi, ici même, dans le courant de 1915.

On ne saurait trop attirer l'attention des géologues et des géographes sur l'admirable Mémoire de M. Lugeon. Le nouveau fascicule, enrichi, comme le premier, de nombreux clichés dans le texte, contient huit planches en couleurs, numérotées de 9 à 16, qui sont plus parfaites encore, et tout aussi parlantes et démonstratives que les huit planches du premier fascicule. La terminaison orientale des nappes de Morcles et des Diablerets; la structure de la vallée de la Lizerne; l'apparition, dans les *lapiés* de Tsanfleuron, de la *carapace* de la nappe des Diablerets; la pénétration vers l'ouest de la région autochtone orientale et la réapparition de la nappe des Diablerets dans l'est; la nappe du Wildhorn dans les massifs du Mont-Gond et du Sérac; les enveloppes crétaciques des plis de cette nappe dans la chaîne de Crêtabesse et dans les montagnes entre le Sex Rouge et la Liène; le front de la nappe du Wildhorn entre les Ormonts et Gsteig; la structure du Sanetsch; celle enfin des montagnes qui dominent la vallée de Lauenen : tels sont les sujets successivement traités par l'éminent professeur de Lausanne. C'est, sous les yeux du lecteur, un immense tableau qui se déroule, et dont tous les traits apparaissent, l'un après l'autre, en pleine lumière. Aucune monotonie dans cette longue description, pourtant si minutieuse. L'auteur est de ceux qui ne peuvent pas être monotones; il possède au plus haut degré l'art d'animer ce qu'il décrit et, sous sa plume, la montagne semble vivre. On n'oubliera plus, après avoir fermé le livre, certains détails caractéristiques : les lapiés de Tsanfleuron, désert de pierre grise au milieu de l'Alpe, formé par l'apparition, en carapace, de la nappe des Diablerets, sous la nappe supérieure; l'empilement valangien de

(1) Nouvelle série, 30e livraison; 60e livraison de la collection entière. — Le Mémoire en question forme l'explication de la *Carte spéciale*, n° 60, publiée en 1910 par la Commission géologique suisse.

Plammis, et les replis les plus élevés de cet empilement s'amortissant dans l'immense masse des grès de Taveyannaz; le cirque d'Olden où l'on voit le pli couché du Schlauchhorn, « suprême d'élégance, s'avancer en bastion menaçant vers les territoires doux et verdoyants des Préalpes »; la fenêtre d'Olden, où apparaissent à la fois le flanc renversé de la nappe du Wildhorn et le flanc normal de la nappe des Diablerets; les montagnes du Sanetsch; enfin, dans la vallée de Lauenen, l'abaissement d'axe du pli du Spitzhorn. Il n'est pas possible d'entrer plus avant dans l'analyse des phénomènes; et cependant la multiplicité des faits ne cache nulle part la belle ordonnance de ce pays de nappes, classique entre tous, et sans lequel nous n'aurions peut-être jamais bien compris la structure des Alpes.

MÉDECINE. — *Équivalents pharmacologiques et unités thérapeutiques : une réforme dans la manière de formuler*. Note de M. **Yves Delage**.

Abondante et riche était déjà, il y a un demi-siècle, la *Matière médicale*, c'est-à-dire l'ensemble des substances et préparations mises à la disposition des médecins pour leurs ordonnances. Rares, déjà à cette époque, étaient les médecins assez instruits pour manœuvrer avec aisance dans l'arsenal des drogues pharmaceutiques, car un effort considérable et constamment entretenu est nécessaire pour connaître les propriétés et les doses de toutes les substances et préparations figurant au Codex et d'un bon nombre d'autres qui n'y figurent pas.

Aussi la très grande majorité des médecins, n'ayant pas la possibilité de consacrer à un tel labeur les efforts et le temps nécessaires, ont été amenés à se limiter, à se constituer un petit formulaire personnel très restreint, mais suffisant cependant pour répondre aux exigences les plus habituelles. Aussi tout pharmacien est-il le plus souvent en état de discerner, à la simple lecture d'une ordonnance, et sans recourir à la signature, lequel des médecins de la ville ou du quartier en est l'auteur. Et cela ne va pas sans des inconvénients fort sérieux : souvent le médecin se rend compte que telle substance ou préparation conviendrait mieux au cas présent que celle dont il a l'habitude, mais c'est cependant celle-ci qu'il formule, parce que de celle-là il ne connaît pas la posologie avec une précision, une sûreté suffisantes. Quant à consulter un livre, il n'y faut pas songer, d'abord parce qu'on ne saurait toujours l'avoir sous la main, puis et surtout parce que ce geste serait interprété par le malade (à tort certainement, mais qu'importe?) d'une façon fâcheuse pour l'amour-propre du médecin.

Les progrès extraordinaires de la chimie, l'extension toujours plus grande des recherches scientifiques et aussi, il faut bien le dire, la concurrence vitale qui travaille sans cesse à fournir à l'industrie et au commerce des aliments nouveaux, ont provoqué, depuis un demi-siècle, une éclosion formidable de produits pharmaceutiques nouveaux : il n'est pas de semaine, de jour même qui n'en voie apparaître quelques-uns.

La plupart tombent rapidement dans un juste oubli, mais le nombre de ceux qui surnagent reste considérable, et il serait aujourd'hui tout à fait impossible d'exiger du médecin le plus consciencieux la connaissance de ces drogues innombrables. Aussi, de nos jours comme il y a 50 ans, par la force des choses, le médecin est amené à se constituer un petit formulaire personnel, plus riche assurément, de façon absolue, que celui de ses devanciers, mais non moins pauvre si on le compare à la masse des ingrédients constituant l'arsenal thérapeutique moderne.

La difficulté n'est pas de connaître l'existence, le nom et les propriétés des médicaments nouveaux, car le médecin les retrouve quotidiennement dans ses journaux, et ces choses sont de telle nature qu'il se forme à leur occasion dans l'esprit des images concrètes qui en fixent le souvenir. Mais il n'en est pas de même pour la posologie ; la dose est une donnée entièrement abstraite, qui ne se rattache aux autres par aucun lien logique, et dont la connaissance exige un effort de mémoire beaucoup plus laborieux. On pourrait faire ici avec les faits et les dates de l'histoire une comparaison suggestive.

Les difficultés de la posologie moderne sont, à mon avis, un des facteurs de cette éviction progressive des formules magistrales dont nous restons les témoins affligés et de leur remplacement par les spécialités pharmaceutiques qui compensent certains avantages indéniables par un prix beaucoup plus élevé, au grand détriment des malades nécessiteux.

Et bien, il existe un moyen extrêmement simple de faire disparaître comme d'un coup de baguette toutes les difficultés de la posologie et de rendre aux ordonnances des médecins la variété et l'élasticité désirables. Il suffirait d'inscrire dans une liste contenant toutes les drogues simples et composées, à la suite du nom de chacune d'elles, un nombre fixe indiquant, en poids ou en volume, selon l'espèce, la dose convenable, *pro die*, pour un adulte de poids moyen. Ce nombre pourrait recevoir le nom d'*Équivalent pharmacologique* (E. P.). Cette désignation lui va bien par le rapprochement qu'elle suggère avec les anciens équivalents chimiques : l'équivalent pharmacologique est en effet le nombre par lequel la drogue prend

place dans les ordonnances, comme l'équivalent chimique est celui par lequel l'élément chimique intervient dans les réactions. A la précision de ce dernier, imposée par la balance, s'oppose une précision du premier, tout aussi rigoureuse, mais d'origine conventionnelle.

Il faudrait, en effet, sans tenir compte de l'élasticité des réactions physiologiques et des variations de la tolérance, donner à l'équivalent pharmacologique une valeur fixe convenablement choisie entre les deux valeurs extrêmes assignées d'ordinaire aux substances pharmaceutiques et représentant l'une un minimum, limite inférieure de la dose efficace, et l'autre un maximum, limite de la tolérance.

Le médecin formulant en équivalents pharmacologiques peut ignorer ces équivalents : seul le pharmacien a besoin de les connaître, mais il a pour cela son livre toujours sous la main.

Pour les commodités de l'usage, et pour éviter l'emploi de fractions ordinaires ou décimales, il conviendrait de prendre pour *unité thérapeutique* (U. T.) le dixième de l'équivalent pharmacologique.

Dès lors, le médecin pourra inscrire, selon que son malade sera un poupon à peine sevré, un enfant de 5 à 6 ans, une faible femmelette, un adulte normal ou un vieillard débilité, en face du nom du médicament, 1, 4, 8, 10 ou 7.

Mais c'est surtout dans les médicaments composites que l'usage de ces unités décimales se montrera avantageux. Si le médecin veut réunir dans une même potion trois ou quatre médicaments concourant au même but, par exemple : chloral, morphine, véronal et extrait de chanvre indien, il lui suffira d'inscrire de chacune de ces substances un nombre d'unités thérapeutiques tel que leur somme fasse 10 ou tel autre nombre qu'il aura choisi, 12, 15, 20 selon les exigences du cas particulier et sous sa seule responsabilité; et cela se fera sans effort, sans possibilité d'erreurs et sans utilité d'une connaissance quelconque des doses réelles de chacun d'eux.

Par là serait définitivement abolie toute possibilité d'empoisonnement par suite d'erreur du médecin.

Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans les détails d'exécution de la réforme; je me contenterai de donner à titre d'exemple une ordonnance quelconque, sous la forme où elle se présenterait dans la pratique :

U. T.	Pyramidon...........................	5
	Phénacétine...........................	3
	Exalgine...........................	2

Pour 5 cachets à prendre dans les 24 heures.

F. S. A. 25 cachets semblables.

Le pharmacien connaîtra d'abord par les lettres U. T. qu'il a affaire aux Unités thérapeutiques. Les 25 cachets devant durer 5 jours, il multipliera par 5 chacun des chiffres donnés, et chaque produit exprimera en cinquièmes d'équivalents pharmacologiques le poids de substance à introduire dans sa mixture.

Pour les préparations anodines et les excipients, bien qu'un coefficient pharmacologique puisse leur être attribué, leur dosage dans les ordonnances pourrait être laissé à la discrétion du pharmacien par l'emploi bien connu du signe q. s. (quantité suffisante). Le médecin pourrait formuler par exemple :

Bromure de potassium	aa 4 U. T.
Bromure de sodium	
Bromure d'ammonium	
Eau distillée de fleurs d'orangers	aa q. s.
Sirop d'écorces d'orange amère	

3 cuillerées par jour, potion pour 10 jours.

Le pharmacien verra immédiatement, la potion devant durer 10 jours, qu'il doit prendre 40 UT = 4 EP des substances actives, les dissoudre dans 15 cuillerées d'eau de fleurs d'orangers et compléter la potion par 15 cuillerées du sirop et le malade verra qu'il doit prendre par jour 3 cuillerées de potion.

Pour mettre ces idées en pratique, la seule nécessité préalable est l'établissement des équivalents pharmacologiques par des hommes compétents. La Commission du Codex, mise au travail par une décision ministérielle est tout indiquée pour cela. Les inventeurs de médicaments nouveaux seraient tenus d'en fournir l'équivalent pharmacologique, que la Commission du Codex ajouterait à sa liste, après l'avoir contrôlé s'il y a lieu. Cette liste se trouverait obligatoirement sur le comptoir de tous les pharmaciens.

Je ne vois à cette réforme qu'un inconvénient : c'est qu'elle aurait pour effet d'achever de rendre le médecin étranger à la posologie. L'inconvénient n'est pas très grave puisque la posologie deviendrait une connaissance de luxe ; d'autre part, la liste complète des équivalents pharmacologiques serait entre les mains de tous les médecins et devrait être présentée sous une forme assez pratique pour être aisément consultable. Enfin, ici comme dans toutes les choses humaines, il ne faut pas réclamer une perfection utopique, mais se demander seulement si les avantages ne l'emportent pas sur les inconvénients.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Sur les essais de résilience.* Note [1] de MM. **Georges Charpy** et **André Cornu-Thenard.**

La plupart des auteurs qui ont publié des recherches sur les essais des métaux à la flexion, par choc, de barreaux entaillés, semblent avoir renoncé à obtenir des mesures ne présentant pas de différences accidentelles; les uns attribuent cette irrégularité des résultats au mode d'essai lui-même; les autres incriminent l'hétérogénéité des métaux mis en œuvre.

Il importe de choisir entre ces deux opinions; la première, en effet, conduirait, à notre avis, à abandonner complètement le mode d'essai envisagé pour apprécier la qualité des métaux et, à plus forte raison, pour en faire la réception avant emploi; d'après la seconde, au contraire, il conviendrait de reconnaître à l'épreuve de flexion par choc sur barreaux entaillés une sensibilité spéciale, propre à déceler certains états physiques que ne révèle aucun des autres essais usuels et dont les influences, au point de vue pratique, ne peuvent être délibérément négligées. Cette sensibilité donnerait alors à la résilience un intérêt tout particulier et légitimerait une étude approfondie de la question.

De nombreuses expériences, encore inédites, effectuées par nous sur ce sujet, en 1913 et 1914, nous ont permis d'adopter le deuxième point de vue. Si nous y revenons en ce moment, c'est que nous croyons pouvoir attirer l'attention sur deux ordres de considérations qui ont orienté le développement de notre travail et qui nous paraissent susceptibles d'être examinées utilement au cours des discussions actuellement engagées sur les études de science appliquée à l'industrie et sur le rôle des Laboratoires nationaux de recherches.

Tout d'abord nous nous sommes astreints à mettre clairement en évidence, dans chaque série de mesures, la précision des chiffres obtenus. Il peut paraître puéril de songer à énoncer ce genre de préoccupation, qui doit présider implicitement à l'exécution de tout travail scientifique. Il suffit, cependant, pour le justifier, de parcourir quelques-unes des publications parues tant sur le sujet qui nous occupe que sur des sujets similaires; M. H. Le Chatelier exprimait ici même dans une Note récente [2] la même

---

(1) Séance du 12 mars 1917.

(2) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 205.

manière de voir. C'est surtout dans les recherches de science appliquée à l'industrie, dont la partie pratiquement utilisable se réduira le plus souvent à des déterminations numériques, qu'il importe de faire ressortir la valeur réelle des nombres publiés. Nous avons donc, pour chaque détermination, répété les mesures un certain nombre de fois (généralement cinq) dans des conditions et avec des barreaux rendus aussi identiques que possible, et nous donnons, au cours de notre exposé, avec le chiffre moyen trouvé pour chaque groupe d'essais, l'écart entre les chiffres extrêmes et l'écart relatif moyen.

En second lieu, il nous a semblé que lorsqu'une question prêtait à controverse et avait fait l'objet de déterminations contradictoires de la part de différents expérimentateurs, une nouvelle série de mesures était toujours insuffisante pour s'imposer incontestablement à tous. Nous avons donc cru utile d'ajouter à la succession de nos expériences une répétition des principales d'entre elles, faites en présence et avec la collaboration d'un certain nombre de personnalités compétentes. La question que nous étudions ayant été soumise à une Commission spéciale par l'Association internationale pour l'essai des matériaux, nous avons convoqué les Membres de cette Commission à une séance d'essais, qui a eu lieu au Laboratoire du Conservatoire des Arts et Métiers le 19 juin 1914 [1]. Les résultats obtenus dans cette séance font l'objet d'un procès-verbal qui sera publié à la suite du Mémoire relatant nos propres expériences, avec lesquelles, d'ailleurs, la concordance est complète. Les conclusions de ce Mémoire, que nous résumons ci-dessous, paraissent avoir acquis ainsi une valeur particulière, que leur confèrent l'impartialité du Laboratoire où ont été effectués les essais et l'autorité des personnalités qui y ont assisté.

Cette manière de procéder nous semble pouvoir être facilement et très utilement généralisée. Les Laboratoires d'essais et de recherches nationaux trouveraient une application fort importante d'une partie de leur activité dans ce rôle d'arbitres des questions discutables; ils fourniraient ainsi aux industriels les données numériques précises et sûres qui leur sont nécessaires,

---

[1] Assistaient à cette séance : M. Stanton, du National physical Laboratory de Teddington; M. Keelhoff, professeur à l'Université de Gand; M. Camerman, chef du Service des Essais aux Chemins de fer de l'État belge; M. Mesnager, inspecteur général des Ponts et Chaussées, directeur du Laboratoire d'Essais des Ponts et Chaussées; M. Guillery, directeur des Établissements Malicet et Blin; M. Belanger, ingénieur chargé du Contrôle à la Compagnie des Chemins de fer de P.-L.-M.

et leur éviteraient l'embarras inextricable qu'ils éprouvent en présence d'une foule d'indications discordantes, entre lesquelles ils n'ont aucun moyen de choisir.

Revenant au cas particulier qui nous occupe, nous résumons brièvement ci-dessous les résultats obtenus.

Nous avons vérifié, tout d'abord, par des essais de flexion sur barreaux non entaillés, la sensibilité et la régularité des appareils employés (moutons-pendules Charpy de 300^{kg} et de 30^{kg}). Puis, après une longue série d'expériences, sur lesquelles il n'y a pas lieu d'insister ici, nous avons réussi à préparer des métaux qui donnaient, avec sécurité, à l'épreuve au choc sur entaille, des résultats d'une régularité rigoureusement comparable à ceux obtenus à la traction, à la flexion ou à la dureté. Le Tableau suivant fait ressortir cette régularité; chacune des déterminations qui y figure portait sur un groupe de cinq barreaux identiques.

Désignation des métaux.	Types de barreaux.	Résilience moyenne.	Écart moyen.	Écart relatif moyen.	Résiliences individuelles extrêmes.
				pour 100	
Acier A.	30 × 30 × 160	24,11	± 0,88	3,6	25,48 — 23,01
	10 × 10 × 53,3	16,42	± 0,20	1,2	16,92 — 16,18
Acier J.	30 × 30 × 160	17,98	± 0,13	0,7	18,10 — 17,81
	10 × 10 × 53,3	12,48	± 0,34	2,7	13,07 — 11,93
Acier P.	30 × 30 × 160	9,98	± 0,15	1,5	10,08 — 9,59
	10 × 10 × 53,3	4,76	± 0,15	3,3	5,13 — 4,63
Cuivre.	30 × 30 × 160	12,14	± 0,27	2,2	12,61 — 11,83
	10 × 10 × 53,3	4,95	± 0,23	4,6	5,41 — 4,76

Disposant de plusieurs métaux bien homogènes et de résiliences variées, nous étions en mesure d'étudier successivement l'influence des divers facteurs qui interviennent dans l'essai. Nous avons ainsi reconnu que :

1° *L'influence de la hauteur de chute est négligeable dans les conditions usuelles.* — Voici les résultats obtenus dans l'une des séries effectuées, pour deux métaux de fragilités notablement différentes :

Désignation des métaux.	Hauteur de chute.	Vitesse d'impact.	Résilience moyenne.	Écart moyen.	Écart relatif moyen.	Résiliences individuelles extrêmes.
	m	m			pour 100	
Acier J.	3,179	9,637	17,27	± 0,34	2,0	18,20 — 17,08
	0,946	5,257	16,88	± 0,97	5,7	18,82 — 15,36
Acier P.	3,179	9,637	9,31	± 0,08	0,1	9,50 — 9,26
	0,480	3,738	9,14	± 0,33	3,6	9,77 — 8,57

2° *Des appareils de diverses dimensions ou de types différents, mais bien construits et convenablement gradués, donnent des résultats concordants.* — Parmi les nombreuses déterminations faites, nous en choisissons une relative à la comparaison de deux moutons-pendules de puissances très différentes, et une autre relative à la comparaison d'un mouton rotatif du type Guillery et d'un mouton-pendule :

Désignation des appareils.	Vitesse d'impact.	Résilience moyenne.	Écart moyen.	Écart relatif moyen.	Résiliences individuelles extrêmes.
Comparaison de deux moutons-pendules de dimensions différentes.					
	m	m		pour 100	
Mouton-pendule Charpy de 300kg.	9,637	21,07	±0,37	1,8	21,54—20,76
» » de 30kg.	5,519	20,41	±1,58	7,8	22,42—18,31
Comparaison d'un mouton rotatif et d'un mouton-pendule.					
Mouton rotatif Guillery de 60kg...	8,858	18,4	±0,34	1,9	18,9 —18,0
Mouton-pendule Charpy de 30kg...	5,519	18,55	±0,25	1,3	19,01—18,24

3° *L'influence de l'entaille est considérable; la valeur trouvée pour la résilience diminue quand la profondeur de l'entaille augmente, toutes choses égales d'ailleurs.*

Le Tableau ci-dessous donne une idée des variations qu'on peut constater.

Désignation des métaux.	Entaille. Section utile.	Forme.	Dimensions.	Usinage.	Résilience moyenne.	Écart. moyen.	Écart. relatif moyen.	Résiliences individuelles extrêmes.
	cm²		mm				p. 100	
Acier K...	0,5	cylindrique	$r = 0,66$	au foret	18,78	±0,95	5,0	20,22-17,64
	0,7	»	$r = 1,0$	»	30,78	±0,73	2,4	31,55-29,17
	0,9	carrée	1 × 1 mm	à la scie usagée	> 33	Barreaux non rompus		
			mm					
Acier J...	0,5	cylindrique	$r = 0,66$	au foret	12,14	±0,34	2,8	12,74-11,82
	0,7	»	$r = 1,0$	»	16,9	±0,32	1,9	17,5 -16,3
Acier P...	0,5	»	$r = 0,66$	»	4,46	±0,06	1,3	4,50- 4,32
	0,7	»	$r = 1,0$	»	5,77	±0,21	3,6	5,94- 5,36
	0,9	carrée	1 × 1 mm	à la scie usagée	6,02	±0,08	1,3	6,07- 5,81

Conclusions. — Il résulte clairement de nos essais que la résilience d'un métal, tout en ne présentant aucune corrélation avec les constantes définies par les essais mécaniques usuels de traction ou de flexion, est une grandeur parfaitement déterminée.

Pour lui attribuer une valeur numérique, il est indispensable de ne

comparer entre eux que des barreaux de formes géométriques bien définies; mais on peut employer des appareils de choc quelconques, à condition qu'ils soient construits convenablement et correctement gradués.

THERMODYNAMIQUE. — *Sur la tension de la vapeur saturée aux basses températures et sur la constante chimique.* Note [1] de M. E. **Ariès**.

D'après les résultats consignés dans notre précédente Communication [2], l'énergie libre d'un gaz parfait et son entropie sont exprimées par les formules

$$(1) \qquad I = -RT\log v + cT - cT\log AT,$$

$$(2) \qquad S = R\log v + c\log AT = -R\log p + C\log T + R\log R + c\log A.$$

Par le choix de l'état initial, à partir duquel sont comptées les valeurs des fonctions de Massieu ($p = 0$, $T = 0$), des deux constantes qui accompagnent d'ordinaire ces fonctions, la constante B a disparu : il ne reste plus que la constante A, encore inconnue, mais bien déterminée et qui caractérise la nature du corps. Suivant une expression empruntée à M. W. Nernst, nous la nommerons la *constante chimique* de ce corps.

En faisant décroître la température à partir du triple point, la vapeur émise par un corps solide, comme d'ailleurs celle qui est émise par un liquide en surfusion, suit déjà très sensiblement les lois des gaz parfaits : à la température de la glace fondante, la tension de la vapeur d'eau est de $4^{mm},5$ environ, et cette vapeur occupe 190000 à 200000 fois le volume du corps condensé. On a vu que, pour un corps solide pris sous son poids moléculaire, l'entropie de sa vapeur saturée avait pour limite la constante R, au zéro absolu; on peut donc, aux très basses températures, remplacer par la quantité R l'entropie S de la formule (2), ce qui donnera pour la tension P de la vapeur saturée, avec une approximation d'autant plus grande que la température sera plus voisine du zéro absolu,

$$(3) \qquad \log P = \frac{C}{R}\log T + \frac{c}{R}\log A + \log R - 1.$$

M. W. Nernst, en se basant sur une hypothèse qu'il a énoncée en jan-

(1) Séance du 12 mars 1917.
(2) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 343.

vier 1906, arrive à une formule qui diffère de celle-ci par un terme négatif $-\frac{L_0}{RT}$, à introduire au second membre, L_0 représentant la chaleur de vaporisation du corps au zéro absolu. On trouve une démonstration assez laborieuse de sa formule dans les *Leçons de Thermodynamique* de M. Max Planck (1). Nous croyons avoir établi, dans notre précédente Note, que L_0 était nul. Le terme $-\frac{L_0}{RT}$ n'est pas négligeable : il vient fausser la valeur de la tension P d'une façon d'autant plus fâcheuse que ce terme acquiert plus d'importance à mesure que la température s'abaisse, et que la formule (3) tend à devenir plus exacte.

Dans la démonstration de cette formule, il a été implicitement supposé qu'il s'agissait de la vapeur émise par un corps solide; mais au-dessous du triple point, le corps peut aussi exister à l'état instable de liquide surfondu, émettant une vapeur dont la tension est supérieure à celle de la vapeur émise par le corps solide à la même température. M. G. Tammann a signalé le bétol et la benzophénone comme se prêtant au phénomène de surfusion à un degré considérable. Tout ce qui a été dit dans notre précédente Note s'applique au cas où le corps condensé serait supposé à l'état liquide. Il arrive à la température du zéro absolu avec une tension de vapeur nulle; la courbe des tensions est tangente à l'axe des températures, et se confond, pour ainsi dire, avec la courbe des tensions de la vapeur émise par le corps solidifié. Les deux courbes se rejoignent sous un angle très aigu au triple point, et doivent peu s'écarter l'une de l'autre. Enfin la variation d'entropie pour le passage de l'état liquide à l'état de vapeur saturée est encore égale à R, au zéro absolu; en sorte qu'à cette température *le corps a même entropie dans ses deux états de condensation.*

Il supporte aussi une même pression : son volume seul pourrait différer dans les deux états, et il passerait de l'un à l'autre sans aucune autre manifestation extérieure qu'un changement de volume. Il semble qu'on soit ainsi amené d'une façon irrésistible à cette conclusion, que l'état solide et l'état liquide se confondent au zéro absolu dans une sorte d'état amorphe et critique qui ne permet plus de les distinguer.

Quoi qu'il en soit, les considérations qui précèdent montrent bien que la formule (3) régit avec une approximation de même ordre, aux basses

(1) Voir la traduction française de l'Ouvrage, 1913, p. 270, 276, 277, 298, 300.

températures, la tension de la vapeur saturée, quel que soit l'état de condensation, solide ou liquide, du corps qui émet cette vapeur.

En désignant par m le rapport $\frac{C}{c}$ des deux chaleurs spécifiques des gaz parfaits, on a

$$(4)\qquad \frac{C}{R}=\frac{C}{C-c}=\frac{m}{m-1},\qquad \frac{c}{R}=\frac{c}{C-c}=\frac{1}{m-1}$$

et la formule (3) pourra être mise sous la forme plus simple

$$(5)\qquad P=KT^{\frac{m}{m-1}}$$

en posant

$$\log K=\frac{c}{R}\log A+\log R-1,$$

ce qui donne pour la valeur de la constante chimique

$$(6)\qquad A=\left(\frac{Ke}{R}\right)^{m-1}.$$

Pour les corps monoatomiques $m=\frac{5}{3}$; pour les corps diatomiques $m=\frac{7}{5}$. Suivant le cas, l'exposant de T dans la formule (5) sera $\frac{5}{2}$ ou $\frac{7}{2}$. Pour les corps d'un degré d'atomicité plus élevé, on ne connaît pas encore avec assez de précision la valeur de m.

La formule (5) a une grande importance au point de vue expérimental. Par la mesure des tensions d'une vapeur saturée à des températures assez basses, on peut arriver à trouver les valeurs numériques les plus convenables à assigner à l'exposant $\frac{m}{m-1}$ et au coefficient K, pour chaque corps expérimenté. On dispose ainsi d'une méthode précieuse pour atteindre, par les formules (4), les valeurs des capacités calorifiques du corps réduit à l'état de gaz parfait, et par la formule (6), la valeur de la constante chimique de ce corps. Ce sont là des déterminations du plus haut intérêt pour les progrès de la Physique moléculaire.

De nombreuses observations de cette nature auraient été déjà entreprises, dit M. Max Planck, sur une série de gaz et de vapeurs, et auraient conduit à des valeurs *plus ou moins approchées* de la constante chimique. Il est à craindre, pour les raisons données plus haut, que les résultats obtenus n'aient perdu en simplicité et en exactitude par l'emploi de la formule de M. Nernst, à laquelle les savants allemands attribuent une portée considérable, et qui a dû, sans doute, servir aux calculs.

La formule (3) permet encore de vérifier, sur les valeurs obtenues pour la constante chimique A et pour le rapport m des chaleurs spécifiques des gaz parfaits, certaines lois tirées du principe de Van der Waals.

D'après l'une de ces lois, $\frac{I}{T}$ doit avoir une même valeur pour tous les gaz parfaits de même atomicité pris à des états correspondants. De la formule (1) on tire

$$\frac{I}{T} = -R\log v + c - c\log AT = R\log p - C\log T + c - R\log R - c\log A.$$

Si l'on exprime le second membre en fonction des variables réduites de Van der Waals $x = \frac{T}{T_c}$, $z = \frac{p}{P_c}$, il vient

$$\frac{I}{T} = R\log z - C\log x + c - R\log R - c\left(\log A + \frac{C}{c}\log T_c - \frac{R}{c}\log P_c\right).$$

La loi sera satisfaite, si l'expression entre parenthèses du second membre a une même valeur pour tous les corps considérés. On peut désigner cette valeur par $\log a$, a étant une constante caractéristique du degré d'atomicité, ce qui donne

$$(7) \qquad a = A\frac{T_c^m}{P_c^{m-1}} = T_c^m\left(\frac{Ke}{RP_c}\right)^{m-1}.$$

On aurait une preuve assez décisive de l'exactitude du principe de Van der Waals, si le contrôle de cette dernière formule par l'expérience venait à établir que la quantité a conserve sensiblement la même valeur pour tous les corps de même atomicité.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Membre de la *Section de Minéralogie*, en remplacement de M. *A. Lacroix*, élu Secrétaire perpétuel.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 42,

M. Haug	obtient	29 suffrages
M. Cayeux	»	10 »
M. Boule	»	3 »

M. **Haug**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation du Président de la République.

PLIS CACHETÉS.

M. **Jean Bouchon** demande l'ouverture de trois plis cachetés reçus dans les séances du 12 février et du 26 février 1917 et inscrits sous les nos 8362, 8364, 8366.

Ces plis, ouverts en séance par M. le Président, contiennent diverses Notes relatives à des questions de Chirurgie.

(Renvoi à la Commission de Médecine et Chirurgie.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** donne la traduction de la lettre suivante de M. *J.-J. Thomson*, Président de la Royal Society, Correspondant de l'Académie :

Burlington House, London, W. March 14th 1917.

Dear Sir,

On behalf of the Council of the Royal Society, I beg to express their sympathy at the grievous loss the Académie des Sciences has sustained through the death of one of their permanent secretaries, M. Gaston Darboux. He was one of our most honoured foreign members, and only a few months ago the Royal Society gave expression to their appreciation of M. Darboux's scientific work by awarding him the Sylvester medal.

The Royal Society values most highly the friendly relations which have always existed between them and the Académie des Sciences, and acknowledge the debt they owe to M. Darboux in maintaining and promoting these relations not only in their official intercourse but also through the private friendship of individual members of the two scientific bodies. M. Darboux was always active in encouraging enterprises having for their object the scientific co-operation between different nations; he was a regular attendant at international meetings, where his tact, knowledge and experience have often helped to overcome difficulties, and to arrive at a friendly understanding.

I beg you to communicate to your Society the expression of regret which the Council of the Royal Society feels assured is shared by the great body of their Fellows.

I am, Dear Sir, very truly yours.

M. **Antonio Ròiti**, vice-président de l'Académie royale des *Lincei*; M. **A.-A. de Pina Vidal**, secrétaire général de l'Académie des Sciences de Lisbonne, adressent à l'Académie l'expression de leurs sentiments de condoléances à l'occasion du décès de M. *G. Darboux*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Annales du Bureau central météorologique de France, publiées par A. Angot; année 1913, fascicule II : *Observations*.

M. **A. Angot**, M. **L. Monteil** prient l'Académie de vouloir bien les compter au nombre des candidats à l'une des places vacantes dans la Section de *Géographie et Navigation*.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres.* Note de M. **Ernest Lebon**.

J'ai l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences un complément à ma Note du 6 mars 1916 (t. 162, p. 346).

1. Je suppose construite la partie du Tableau -1 où, en face des caractéristiques allant de 2 à B, sont inscrits les facteurs premiers des nombres admettant ces caractéristiques.

Le produit des deux nombres $(\varepsilon'; -1)$ et $(\theta'; -1)$ du Tableau -1 est dans le Tableau 1 et il a pour caractéristique

$$K_{\varepsilon'\theta'} = B\varepsilon'\theta' - (\varepsilon' + \theta'). \tag{1}$$

Supposons que le produit $\varepsilon'\theta'$ soit $< B$.

K désignant une caractéristique $< B^2$ d'un nombre du Tableau 1, soient :

q le quotient par défaut $< B$ et r le reste obtenus en divisant K par B. On a

$$K = Bq + r. \tag{2}$$

Dans le second membre de l'égalité (1), le terme $-(\varepsilon' + \theta')$ est négatif. Écrivant ainsi le second membre de l'égalité (2)

$$K = B(q+1) - (B - r), \tag{2'}$$

on peut identifier les égalités (1) et (2'), ce qui donne les équations

$$\varepsilon'\theta' = q + 1, \qquad \varepsilon' + \theta' = B - r. \tag{3}$$

Les valeurs des inconnues ε' et θ' sont les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - (B - r)x + q + 1 = 0, \tag{4}$$

lorsque ces racines sont entières et positives, c'est-à-dire lorsque le discriminant est un carré entier positif.

Sans résoudre l'équation (4), on peut, du système (3), tirer les valeurs entières et positives de ε' et θ'. En effet, il est facile de décomposer, de toutes les manières possibles, $q + 1$ en groupes de deux facteurs entiers positifs. Si la somme de deux facteurs d'un groupe est égale à $B - r$, ces deux facteurs sont les valeurs de ε' et θ'.

Les facteurs premiers du nombre dont la caractéristique est K sont alors, dans le Tableau -1, aux caractéristiques ε' et θ'.

2. Par suite, *sans avoir, dans le Tableau* 1, *une caractéristique* K *et les facteurs premiers qui lui correspondent, on peut obtenir, dans le Tableau* -1, *des caractéristiques* ε' *et* θ' *qui donnent les facteurs premiers admis par les nombres qui conduisent à* K.

3. *Exemple.* — La base B étant égale à 30030, supposons que l'on ait, après avoir amené un nombre N dans le Tableau 1, obtenu

$$K = 20\,900\,827, \qquad q = 695, \qquad r = 29\,977.$$

Comme on ne peut décomposer q en deux facteurs dont la somme soit r, on forme

$$q + 1 = 696, \qquad B - r = 53;$$

alors on voit rapidement que l'on a les deux égalités

$$696 = 24.29 \qquad \text{et} \qquad 24 + 29 = 53;$$

d'où l'on conclut que N admet des facteurs premiers des nombres qui, dans le Tableau -1, ont 24 et 29 pour caractéristiques. Or, en face de 24 et 29, il y a respectivement les produits

$$31.67.347 \quad \text{et} \quad 37.23537;$$

donc N admet des facteurs de ces produits [1].

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la réduction des formes binaires de degré quelconque à coefficients et indéterminées réels ou complexes.* Note de **M. Gaston Julia**, présentée par M. Émile Picard.

Dans deux Notes précédentes [2] j'ai donné quelques remarques sur la méthode de réduction continuelle imaginée par Hermite pour les formes réelles, et sur une deuxième méthode qui la généralise pour les formes à coefficients et indéterminées complexes. Je voudrais ici montrer l'aide que la deuxième méthode apporte à la première.

Envisageons la forme à coefficients réels

$$(1) \qquad f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots + a_n y^n$$

et, conjointement, l'équation

$$(1') \qquad f(z, 1) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

On peut supposer $a_0 \neq 0$.

(1′) a pour racines réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$; et pour couples de racines imaginaires conjuguées $(\beta_1, \beta'_1), \ldots, (\beta_\nu, \beta'_\nu)$. La méthode exposée dans la deuxième des Notes précédentes nous conduit à associer à (1) la forme d'Hermite définie suivante :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^{i=\mu} t_i^2 \,\mathfrak{N}(x - \alpha_i y) + \sum_{k=1}^{k=\nu} u_k^2 \,\mathfrak{N}(x - \beta_k y) + \sum_{k=1}^{k=\nu} u_k'^2 \,\mathfrak{N}(x - \beta'_k y) \\ &= pxx' - qxy' - q'x'y + ryy'. \end{aligned}$$

Les t_i^2, u_k^2, $u_k'^2$ sont des paramètres positifs *arbitraires*. Si l'on fait varier les t_i^2, u_k^2, $u_k'^2$ de toutes les façons possibles, le point représentatif ζ de φ dans

[1] Une Note contenant d'autres cas analogues sera bientôt publiée dans un autre Recueil.

[2] *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 32 et p. 352.

le demi-espace $O\xi\eta\tau (z = \xi + i\eta, \tau > 0)$ décrit le *domaine* D *associé à la forme f* par notre deuxième méthode. Mais f ayant ses coefficients réels, le *polyèdre non euclidien* D *est symétrique par rapport au plan* $O\xi\tau$. De plus si l'on marque dans le demi-plan $O\xi\tau$ les points dont les affixes par rapport aux axes $O\xi\tau$ sont précisément $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ ($\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ sont supposés ici avoir leur partie imaginaire positive) *la section du polyèdre* D *par le plan* $O\xi\tau$ *sera le plus petit polygone convexe non euclidien contenant à son intérieur ou sur son périmètre tous les points précédents*. Ce sera donc le *polygone qu'on est conduit à associer à f par la méthode d'Hermite* quand on représente les racines de f dans le plan $O\xi\tau$ et non plus dans le plan $O\xi\eta$. Voici donc un premier lien qui rattache la méthode d'Hermite à celle qui fait l'objet de notre deuxième Note. Il y en a un second. Considérons l'expression θ dont le minimum nous fournira la correspondante de f,

$$(3) \quad \theta = \frac{\mathfrak{N}(a_0)\,\delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \ldots t_\mu^2 u_1^2 u_1'^2 \ldots u_\nu^2 u_\nu'^2}, \quad n = \mu + 2\nu, \quad \delta = pr - qq', \quad \mathfrak{N}(a_0) = a_0^2.$$

Il n'est pas difficile de reconnaître avant toutes choses que *le minimum de* θ *ne peut avoir lieu que si* $u_k^2 = u_k'^2$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$. Il suffit de grouper dans la forme φ les termes en u_k^2 et $u_k'^2$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\mu} t_i^2 \mathfrak{N}(x - \alpha_i y) + \sum_{k=1}^{\nu} [u_k^2 \mathfrak{N}(x - \beta_k y) + u_k'^2 \mathfrak{N}(x - \beta_k' y)],$$

et l'étude de θ montre qu'une condition nécessaire au minimum est $u_k^2 = u_k'^2$ quel que soit k. Mais alors il est visible que dans la forme φ, q et q' sont égaux et réels. D'ailleurs, si l'on suppose x et y réels, φ *se réduit visiblement dans ce cas à la forme* φ_1 *qu'Hermite associe à f*

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\mu} t_i^2 \mathfrak{N}(x - \alpha_i y)^2 + 2\sum_{k=1}^{\nu} u_k^2 (x - \beta_k y)(x - \beta_k' y) = px^2 - 2qxy + ry^2.$$

La fonction θ *précédente* (3) *se réduit aussi à la fonction* θ *d'Hermite* puisque $\delta = pr - qq' = pr - q^2$, $\mathfrak{N}(a_0) = a_0^2$ et $u_k^2 = u_k'^2$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$. Il est donc clair que la *correspondante associée à f* par notre deuxième méthode *devient la correspondante d'Hermite* lorsque f a ses coefficients réels : c'est-à-dire que son point représentatif ζ, dans le plan $O\xi\tau$, est exactement le même [1]

---

[1] La vérification est aisée à faire pour les formes cubiques et biquadratiques dont il a été donné, dans les deux Notes précédentes, des figurations géométriques simples pour les correspondantes.

que celui de la correspondante d'Hermite (la représentation, pour cette dernière, étant faite dans le demi-plan analytique $O\xi\tau$, au lieu du demi-plan $O\xi\eta$, comme il a été vu plus haut). Il convient enfin de remarquer : 1° que le demi-plan $O\xi\tau$ découpe, dans la division pentaédrique de l'espace, sa propre division modulaire; 2° que la substitution du groupe de Picard qui amène un point ζ du demi-plan $O\xi\tau$ dans le pentaèdre fondamental π_0, en conservant le demi-plan $O\xi\eta$ ($\eta > 0$), n'est autre que la *substitution modulaire à coefficients réels :*

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ entiers réels}),$$

qui amène le point d'affixe ζ du demi-plan $O\xi\tau$, en Z, dans le domaine fondamental D_0 de la division modulaire de ce demi-plan.

Dès lors, il est clair que notre deuxième méthode fournit ici pour f les mêmes réduites que la méthode d'Hermite. Mais elle montre en outre pourquoi il faut choisir, pour la forme quadratique φ associée à f, des expressions *différentes selon les hypothèses qu'on fait sur la réalité des racines de f*. Toutes ces expressions différentes se ramènent en réalité à la *seule expression*

$$(2) \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} t_i^2 N(x - z_i y) \qquad (\text{les } z_i \text{ étant les racines de } f),$$

où il faut supposer x et y réels.

De plus, la fonction θ *dont la valeur minimum est ce qu'on appelle le* déterminant *de f, et dont l'expression en fonction des racines change dans la méthode d'Hermite avec les hypothèses qu'on fait sur la réalité des racines de f*, reçoit avec notre deuxième méthode *une seule expression* (3) *en fonction des racines, quelles que soient les hypothèses précédentes*, et c'est la raison pour laquelle l'équation qui relie le déterminant de f aux coefficients de cette forme ne dépend nullement des hypothèses faites sur la réalité des racines, comme la définition de ce déterminant par la méthode d'Hermite pouvait *a priori* le faire croire. Hermite avait d'ailleurs constaté le fait précédent, comme l'attestent les lignes suivantes (*Œuvres*, t. 1, p. 92) : « On observe cette circonstance remarquable que, pour chaque degré, c'est toujours la même équation en D [1] qui vient s'offrir, bien que les calculs par lesquels on y arrive diffèrent beaucoup suivant le nombre des racines réelles et imaginaires; mais je n'ai pu jusqu'à présent découvrir la raison générale de ce fait important. »

---

[1] D est la racine carrée du déterminant.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions hyperfuchsiennes.* Note de M. GEORGES GIRAUD, présentée par M. Émile Picard.

1. Cherchons les groupes formés des substitutions qui conservent un point intérieur à l'hypersphère

(1) $$x x_0 + y y_0 - z z_0 = 0,$$

conservée par les substitutions hyperfuchsiennes considérées. On ne diminue pas la généralité en supposant que le point fixe soit (0, 0, 1). Les substitutions cherchées sont du type

$$(x, y, z;\ ax + by,\ cx + dy,\ ze^{i\theta});$$

les substitutions $[\xi, (a\xi + b) : (c\xi + d)]$ forment un groupe isomorphe au groupe cherché et formé d'un nombre fini de substitutions : c'est donc un groupe cyclique ou l'un des groupes du diédre, du tétraèdre, du cube ou de l'icosaèdre. A la substitution unité de ce groupe correspond dans le groupe cherché les puissances d'une substitution $(x, y, z; xe^{i\theta}, ye^{i\theta}, ze^{-2i\theta})$, où $\theta : \pi$ est rationnel ; la recherche se termine facilement.

2. Supposons qu'à un groupe hyperfuchsien G corresponde une fonction Θ ne pouvant se prolonger au delà de l'hypersphère. Admettons encore que le groupe G possède une *substitution elliptique à plan double pénétrant dans l'hypersphère* [1]

(2) $$(x, y, z;\ xe^{i\theta},\ ye^{-2i\theta},\ ze^{i\theta}).$$

Alors le plan double $y = 0$ est transformé en lui-même par une *infinité* de substitutions

$$(x, y, z;\ ax + bz,\ ye^{i\omega},\ cx + dz)$$

de G, de façon que les $[\xi, (a\xi + b) : (c\xi + d)]$ forment un groupe fuchsien Γ de la première, de la deuxième ou de la sixième famille de Poincaré. Le polyèdre fondamental de G formé par la méthode du rayonnement découpe sur $y = 0$ le polygone fondamental de Γ formé par la méthode du rayonnement. Pour $y = 0$, les fonctions hyperfuchsiennes se réduisent à des fonctions fuchsiennes. A $y = 0$ correspond pour le système d'équations aux dérivées partielles considéré dans la dernière Note que j'ai eu l'honneur

---

(1) J'ai dû étudier complètement la classification indiquée par MM. Poincaré et Picard (*Comptes rendus*, t. 98, 1884, p. 349 et 416.

de présenter à l'Académie ([1]), une courbe singulière de genre p au maximum, si p est le genre de Γ. Un passage de cette Note semblait devoir faire exclure le cas de $p > 1$; mais on ne peut l'exclure que si G ne contient pas de substitutions telles que (2)

3. Considérons une courbe singulière; soient r_1, r_2, r_3 les racines de l'*équation déterminante*, dont la somme est *un*. Si ces racines sont distinctes, la courbe est unicursale; $r_1 - r_2$ et $r_1 - r_3$ sont des fractions irréductibles à numérateurs premiers entre eux; si ces racines sont toutes égales, la courbe est de genre *un* au plus, et une seule des trois intégrales fondamentales est logarithmique; si deux des trois racines sont égales, la troisième en différant de l'inverse d'un entier, la courbe est d'un genre quelconque et aucune intégrale n'est logarithmique.

4. Dans la méthode du rayonnement, la face qui sépare les polyèdres de centres (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') a pour équation

$$\text{norme}\,(x_0\xi + y_0\eta - z_0\zeta) - \text{norme}\,(x_0\xi' + y_0\eta' - z_0\zeta') = 0.$$

Le premier membre est une forme quadratique (a, a', a'', b, b', b'') à indéterminées conjuguées, de discriminant nul, et où $a + a' = a''$. Nous appellerons *faux-plan* une telle surface; le plan $ux + vy + wz = 0$, qui contient (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ'), s'appellera la *polaire* du faux-plan. *Bornons-nous*, pour abréger, *aux cas qui se présentent dans la méthode du rayonnement :* 1° le faux-plan a un point double (α, β, γ) unique, extérieur à l'hypersphère (1); 2° le plan $\alpha x_0 + \beta y_0 - \gamma z_0 = 0$ n'est autre que la polaire.

5. Considérons maintenant un troisième centre (ξ'', η'', ζ''). Les trois faux-plans que ces centres déterminent deux à deux ont une arête commune A, à moins que deux quelconques d'entre eux ne se coupent pas.

1° Si les trois polaires sont confondues, A est un plan $ux + vy + wz = 0$, nommé *arête plane;* une infinité de faux-plans peuvent passer par A, mais tous ceux qui interviendront dans la méthode du rayonnement comme faces de polyèdres ayant comme arête une même portion de A ont même polaire. Les traces de ces faux-plans sur cette polaire sont des cercles dont les angles mutuels, au sens ordinaire, s'appelleront les *angles* de ces faux-plans. Dans un cycle d'arêtes de première sorte, la somme des angles doit être égale à $2\pi : q$, q étant entier.

([1]) *Comptes rendus*, t. 164, 1917, p. 386).

2° Si les trois polaires de ces trois faux-plans ne sont pas confondues, A est une *arête gauche :* aucun autre faux-plan ne peut contenir A. Un cycle d'arêtes gauches comprend nécessairement trois arêtes; si l'on a écrit que les faces conjuguées sont *congruentes*, ces cycles ne donnent lieu à aucune condition supplémentaire. Mais, pour la congruence des faces conjuguées adjacentes aux trois arêtes, on peut indiquer tout de suite des conditions nécessaires. Il faut introduire une certaine géométrie non euclidienne à quatre dimensions, où, notamment, un triangle n'est plus déterminé par les longueurs de ses trois côtés : il faut y joindre ce qu'on peut appeler un des trois angles, en tout quatre éléments. La connaissance de deux faux-plans passant par une arête gauche suffit à faire connaître ces quatre éléments pour le triangle qui a pour sommets les trois centres des polyèdres adjacents à cette arête : ces quatre éléments doivent avoir les mêmes valeurs pour les deux autres arêtes du cycle.

Si un polyèdre satisfait aux conditions qui viennent d'être sommairement indiquées, c'est le polyèdre fondamental d'un groupe hyperfuchsien.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Cas des cyclides.* Note [1] de M. A. **Buhl**, présentée par M. G. Humbert.

Dans mon quatrième Mémoire (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1914) j'ai considéré un cône $O\Sigma$, de directrice fermée Σ quelconque, dans lequel la surface algébrique

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots + \varphi_0 = 0 \tag{1}$$

détermine, en général, m volumes coniques de somme algébrique

$$\sum \tau_i = \int\int_\sigma \left(-\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m} \right) (\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma. \tag{2}$$

L'intégrale double suppose une cloison d'intégration σ, jetée de façon quelconque sur le contour fermé Σ; α, β, γ sont les cosinus dirigeant la normale à σ en $d\sigma$.

Cette intégrale double pourrait être variée quant à sa forme, notamment en prenant la cloison σ sur une des m nappes de (1), mais la forme (2) possède un avantage capital. Désignant par Λ toute la parenthèse en φ, je

---

[1] Séance du 12 mars 1917.

puis poser

$$\Lambda = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z},$$

et, d'après la formule de Stokes, j'ai immédiatement

$$\sum \tau_i = \int_\Sigma \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ F & G & H \end{vmatrix}.$$

Diverses surfaces (1) *peuvent avoir des* Λ *identiques*. Cette assertion évidente fait présager de nombreux théorèmes sur l'équivalence de sommes abéliennes de volumes coniques attachées à des surfaces différentes. De plus, on peut identifier (2) à des intégrales analogues, ayant une autre origine géométrique, d'où des comparaisons dont je n'indiquerai ici que des exemples très simples.

Soient des surfaces de centre O, c'est-à-dire telles que O soit centre des moyennes distances pour les m points d'intersection de la surface situés sur toute droite passant par O. Alors φ_{m-1} n'existe pas et (2) se réduit à

$$(3) \qquad \sum \tau_i = -\iint_\sigma \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

Pour

$$\varphi_m = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_{m-3} = -4k^2(ax + by + cz),$$

l'égalité (3) se transforme en

$$\sum \tau_i = 2k^2 \int_\Sigma \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = k^2 \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{R}.$$

Telle est l'expression de la somme abélienne des volumes coniques de sommet O déterminés, dans le cône OΣ, par la *cyclide*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4h(Ax^2 + By^2 + Cz^2) - 4k^2(ax + \beta y + cz) + 4l^4 = 0.$$

Cette somme dépend de la différence des aires σ_2 et σ_1 découpées par OΣ sur la sphère (a, b, c, R). La dernière intégrale de ligne, formée par M. G. Humbert pour exprimer $\sigma_2 - \sigma_1$, reçoit donc ici une nouvelle interprétation.

Quant à la sphère (a, b, c, R) elle pourrait être remplacée par toute autre dont les coordonnées du centre seraient proportionnelles à a, b, c. Ainsi toutes les sphères qui, avec (a, b, c, R), coupent la cyclide sur une même

famille de quadriques [G. HUMBERT, *Sur les surfaces cyclides* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1885, p. 135)], pourraient être substituées à (a, b, c, R).

Reprenons maintenant la réduction de (2) à la forme (3). Cette réduction est encore possible quand

$$\varphi_{m-1}^2 = 3\varphi_m \varphi_{m-2},$$

relation qui définit toute une nouvelle classe de surfaces aussi importantes que celles de centre O; son étude peut donner lieu à d'assez grands développements, car elle comprend autant de cas particuliers qu'il y a de manières de décomposer le second membre en facteurs distincts. Soit, parmi beaucoup d'autres décompositions possibles,

$$\varphi_{m-2} = \lambda_1^2 \psi_{m-4}, \qquad \varphi_m = 3\mu_2^2 \psi_{m-4}, \qquad \varphi_{m-1} = 3\lambda_1 \mu_2 \psi_{m-4},$$

λ_1 étant un facteur homogène du premier degré et μ_2 un facteur du second. On obtient ce théorème :

Pour les surfaces d'équation complète

$$(3\mu_2^2 + 3\lambda_1\mu_2 + \lambda_1^2)\psi_{m-4} + \varphi_{m-3} + \varphi_{m-4} + \ldots + \varphi_0 = 0,$$

comme pour les surfaces de centre O

$$3\mu_2^2\psi_{m-4} + \star + \theta_{m-2} + \varphi_{m-3} + \theta_{m-4} + \ldots + \theta_0 = 0,$$

on a

$$\sum \tau_i = -\frac{1}{3}\int\int_\sigma \frac{\varphi_{m-3}}{\mu_2^2\psi_{m-4}}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, d\sigma.$$

Les surfaces de centre O peuvent être identifiées aux cyclides déjà signalées et les surfaces associées, d'équation complète, sont d'autres cyclides, de centre différent O′, mais de somme abélienne équivalente pour les volumes coniques de même cône à sommet en O. Elles ont d'ailleurs, par rapport à O′, une somme conique en relation simple avec celle attachée à O, mais je dois me borner à promettre de développer tout ceci dans un cinquième Mémoire.

MÉCANIQUE. — *Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps*. Note de M. L. HARTMANN.

Les résultats obtenus dans les recherches expérimentales, qui font l'objet de mes communications antérieures [1], entraînent de nombreuses conséquences, parmi lesquelles j'indiquerai d'abord les suivantes :

---

(1) *Comptes rendus*, t. 163, 1916, p. 222 et 559; t. 164, 1917, p. 94. — Dans la première Note, page 224, ligne 20, *au lieu de* dans, *lire* dont. Dans la deuxième Note, page 559, ligne 11, *au lieu de* $\varphi = (1 - N)$, *lire* $\varphi = (1 - N)\, v$.

1° On sait qu'adoptant les idées émises par Huyghens et par Leibnitz, un grand nombre d'auteurs modernes [1] admettent que la force vive se conserve rigoureusement dans le choc élastique de tous les corps indistinctement, et que toute diminution survenue dans sa valeur est due à une déformation permanente des masses qui se rencontrent.

Cette hypothèse n'est pas exacte.

J'ai signalé, en effet, qu'alors que les déformations sont purement élastiques, la force vive initiale subit néanmoins, dans quelques conditions que le choc ait lieu, une diminution systématique, qui varie suivant la matière constitutive et la forme des masses employées; cette diminution atteint une valeur notable, quand les corps sont très déformables; par contre, elle est d'autant plus petite que la dureté des masses est plus grande, toutefois sans être jamais nulle.

Les formules trouvées pour les vitesses finales accusent, en outre, que la diminution de la force vive initiale n'implique nullement l'existence de déformations permanentes dont les masses seraient affectées.

Reportons-nous, par exemple, au cas de deux cylindres en acier, de masses m et m', dont l'un a une vitesse V, au moment où il rejoint l'autre, préalablement immobile.

Les vitesses effectives de ces cylindres, immédiatement après leur séparation, étant ψ et ψ', la diminution de la force vive est égale à

$$m\mathrm{V}^2 - (m\psi^2 + m'\psi'^2);$$

d'après l'énoncé ci-dessus, cette diminution aurait pour cause une altération interne des cylindres, et ceux-ci, s'ils étaient parfaitement élastiques, devraient prendre des vitesses φ et φ', telles qu'on ait $m\mathrm{V}^2 = m\varphi^2 + m'\varphi'^2$; dès lors, l'expression vraie de la diminution de la force vive serait

$$m\varphi^2 - m\psi^2 + m'\varphi'^2 - m'\psi'^2,$$

le cylindre-marteau entrant dans cette diminution globale pour la quantité $m\varphi^2 - m\psi^2$, et le cylindre-enclume pour la quantité $m'\varphi'^2 - m'\psi'^2$.

Ces quantités, si elles représentaient des forces vives, perdues à l'état de mouvement et retrouvées sous une autre forme, devraient être toutes deux positives, quelles que soient les masses.

Or, si l'on désigne par N le rapport $\frac{2m'}{m+m'}$, on a vu que les forces

---

[1] Voir notamment E. Mach, *La Mécanique*, traduction de M. Émile Bertrand, p. 296 et suiv, Paris, 1904.

vives théoriques des cylindres, $m\varphi^2$ et $m'\varphi'^2$, sont égales à $(1-N)^2 mV^2$ et $\frac{m}{m'}N^2 mV^2$ et que leurs forces vives effectives, $m\psi^2$ et $m'\psi'^2$, ont pour valeurs, de leur côté, $(1-n)^2 mV^2$ et $\frac{m}{m'}n^2 mV^2$, le nombre n étant toujours plus petit que N; d'où les relations

$$m\varphi^2 - m\psi^2 = (N-n)(N+n-2)mV^2 \quad \text{et} \quad m'\varphi'^2 - m'\psi'^2 = \frac{m}{m'}(N^2-n^2)mV^2.$$

Par suite, la quantité $m'\varphi'^2 - m'\psi'^2$ est positive dans tous les cas, mais il en est autrement pour la quantité $m\varphi^2 - m\psi^2$, qui s'annule pour $N+n=2$, c'est-à-dire quand la masse m' du cylindre-enclume a la valeur $m+\mu$, légèrement supérieure à la masse du cylindre-marteau, et qui, dans ces conditions, est positive ou négative, suivant que m' est supérieure ou inférieure à $m+\mu$.

Il en résulte que, lorsque le cylindre-enclume a une masse plus petite que $m+\mu$, on doit abandonner la conception d'après laquelle la force vive manquant après le choc dans le cylindre-marteau se trouverait compensée par une déformation permanente qui se produirait dans ce cylindre. Comme, d'ailleurs, cette équivalence, du moment qu'elle est irréalisable pour des valeurs déterminées du rapport des masses, ne saurait exister pour d'autres valeurs de ce même rapport, elle doit être rejetée aussi dans le cas où le cylindre-enclume a une masse supérieure à $m+\mu$, bien qu'alors la quantité $m\varphi^2 - m\psi^2$ soit positive.

L'expérience démontre ainsi, de la manière la plus certaine, que la force vive ne se conserve jamais dans le choc élastique, et que la diminution de sa valeur est indépendante de toute idée de déperdition provoquée par une déformation permanente des masses; ce qu'on peut dire seulement, c'est que, dans le cas des corps durs, la conservation de la force vive se trouve à peu près vérifiée.

Ce cas particulier est le seul qui ait été envisagé dans les quelques essais effectués autrefois pour établir les lois du choc, et l'on en a déduit le principe actuel de la conservation rigoureuse de la force vive, grâce à deux hypothèses tacites, dont l'inexactitude ressort de ce qui précède.

D'abord, par une généralisation, dont il n'y a d'exemple pour aucun autre phénomène naturel, on a étendu à tous les corps, sans distinction, les résultats afférents aux corps peu déformables. En second lieu, la faible valeur qu'acquiert alors la diminution de la force vive a été interprétée comme signifiant que cette diminution serait nulle, si une cause n'intervenait pour la faire naître.

2° Les perfectionnements apportés aux moyens d'observation ont conduit divers expérimentateurs à reconnaître, depuis quelque temps déjà, la non-conformité des formules classiques du choc avec les faits ([1]). Mais, malgré cette constatation, on n'en a pas moins continué à regarder la force vive comme ayant la même valeur avant le commencement, et après la fin du contact; on a supposé, à cet effet, que les phénomènes qui accompagnent la déformation élastique absorberaient une quantité de force vive précisément égale à la différence entre la force vive initiale et la force vive restante, de sorte que la première se retrouverait intégralement dans la somme de la seconde et de la force vive absorbée.

Cette interprétation des effets du choc n'est pas plus acceptable que la précédente, dont elle ne diffère que par la cause physique à laquelle la diminution de la force vive est attribuée.

Le principe de la conservation étant pris pour point de départ, comme dans le premier énoncé, les forces vives manquant après le choc dans les deux masses sont exprimées, cette fois encore, par les quantités $m\varphi^2 - m\psi^2$ et $m'\varphi'^2 - m'\psi'^2$, dont l'une est toujours positive, mais dont l'autre est positive, nulle ou négative suivant la valeur relative des masses. En raison du caractère négatif que présente ainsi, dans certains cas, l'une de ces quantités, on n'est pas en droit, non plus, d'établir une corrélation entre la diminution de la force vive de l'ensemble des deux masses et leurs manifestations élastiques.

PHYSIQUE. — *Chaleurs de vaporisation et pressions maxima des vapeurs.* Note de M. **A. Leduc**, présentée par M. J. Violle.

La méthode que j'ai décrite ([2]) pour calculer le rapport γ des deux chaleurs spécifiques principales des vapeurs suppose connues avec une assez grande exactitude les expressions $\frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$ et $\frac{L}{T} - \frac{dQ}{dT}$. Nous ne possédons malheureusement qu'un petit nombre de séries d'expériences précises relatives, tant à la pression maxima F qu'à la chaleur latente de vaporisation L ou à la chaleur totale Q.

Je me suis proposé de confronter les valeurs de L et de $\frac{dF}{dT}$ relatives au

---

([1]) de Maupeou d'Ableiges, *Les théories du choc et l'expérience.* Paris, 1903.

([2]) *Méthode des cycles* (*Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 1752; t. 153, 1911, p. 51; t. 154, 1912, p. 812; *Ann. de Chimie et de Phys.*, 8e série, t. 28, p. 577).

même corps, mais obtenues en général par des expérimentateurs différents, au moyen de la formule de Clapeyron-Thomson,

$$L = \frac{T}{J}(u' - u)\frac{dF}{dT},$$

qui devient, en remplaçant u' par sa valeur tirée de ma formule $MFu' = RT\varphi$,

$$(1) \qquad L = \frac{RT^2}{JM}\varphi\left(1 - \frac{u}{u'}\right)\frac{1}{F}\frac{dF}{dT}.$$

Mes formules empiriques permettent de calculer φ et par suite u' à un ou deux millièmes près dans le cas le plus défavorable, et à quelques dix-millièmes près en général, c'est-à-dire avec une précision surabondante.

Éther. — Prenons par exemple l'éther, dont la pression maxima, étudiée par Young et Ramsay [1], est bien représentée entre 0° et 60° par

$$(2) \qquad \log F = 1,26694 + 207.10^{-4}.t - 94.10^{-6}.t^2 + 31.10^{-8}.t^3.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \frac{1}{F}\frac{dF}{dT} = 2,3026(207.10^{-4} - 188.10^{-6}.t + 93.10^{-8}.t^2).$$

Le Tableau ci-dessous donne, à côté des valeurs calculées avec

$$\frac{R}{J} = 1,988 \qquad \text{et} \qquad M = 74,09,$$

les valeurs expérimentales d'après la formule de Winkelmann [2] :

t.	φ.	u'.	$\frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$.	L (calc.).	L' (exp.).	Écart pour 100.
10°.......	0,9771	798,5	0,04355	91,24	92,37	+1,2
30.......	0,9595	377,8	0,03660	86,15	89,80	+4,2
50.......	0,9343	199,3	0,03137	81,46	86,83	+6,6

On voit que les nombres de Winkelmann sont notablement trop élevés si les valeurs de $\frac{1}{F}\frac{dF}{dT}$ sont sensiblement exactes. *Les valeurs de* L' *à* 30° *et*

---

[1] *Phil. Trans.*, t. 178, 1887.
[2] *Wiedemann's Ann.*, t. 9, 1880, p. 208.

à 50° sont précisément celles qu'on obtiendrait en supposant que la vapeur saturante d'éther se conduisit comme gaz parfait !

Regnault avait trouvé à 30° : $90^{cal},5$, encore plus inconciliable avec les pressions maxima de Young et Ramsay.

Enfin M. Perot (*Thèse*, 1887) trouve à cette même température $91^{cal},5$, dont l'erreur dépasse 6 pour 100 si nos données sont exactes. Ajoutons qu'il trouve, en même temps, $\frac{dF}{dT} = 2^{cm},3584$ au lieu de 2,372, et $u' = 400^{cm^3}$ au lieu de 378 (autre erreur voisine de 6 pour 100), de sorte que, par suite de la compensation particulièrement heureuse des erreurs, la valeur de l'équivalent mécanique J obtenue n'est inférieure que de 0,5 pour 100 à celle considérée comme exacte aujourd'hui.

Quoi qu'il en soit, en présence de pareils écarts, on peut se demander si une part importante de l'erreur ne peut pas être imputée à $\frac{dF}{dT}$. J'ai montré [1], en effet, que l'erreur sur cette dérivée peut atteindre 1 pour 100, même pour la vapeur d'eau à 100°, c'est-à-dire pour le corps le plus étudié, le plus facile à se procurer abondamment à l'état de pureté, et à la température la plus facile à maintenir constante. Il se pourrait donc que, pour un autre corps, dans des conditions quelconques, l'erreur atteignît par exemple 2 pour 100. Mais il faut remarquer que

$$F_{T_1} = F_{T_0} + \int_{T_0}^{T_1} \frac{dF}{dT}\, dT. \qquad (4)$$

Si donc les valeurs de F aux températures limites des expériences T_0 et T_1 sont convenablement déterminées, il en résulte que les valeurs calculées de $\frac{dF}{dT}$ sont tantôt par excès, tantôt par défaut. Les valeurs calculées de L doivent donc être aussi tantôt trop faibles, tantôt trop fortes. Or ce n'est pas ce qui arrive ici. Je considère donc comme certain que la majeure partie de l'écart à 30° et à 50° est due à l'erreur sur L'. Il faut d'ailleurs reconnaître que cette détermination de L' est hérissée de difficultés, même à la température d'ébullition normale.

Enfin on peut se demander si les divers expérimentateurs ont bien opéré sur le même corps, c'est-à-dire sur l'éther pur et anhydre.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 144, 1917, p. 1259. A 100°, $\frac{dF}{dT}$ est sensiblement mesuré par 27^{mm} de mercure, et non $27^{mm},25$ calculé par Broch d'après Regnault.

Benzène. — Les mêmes calculs effectués sur le *benzène* donnent les résultats suivants, dont je rapproche les données expérimentales de Regnault :

t.	L (calc.).	L' (expér.).	Écart pour 100.
60°	97,98	99,48	+1,5
80	94,24	94,16	−0,1
100	90,62	87,90	−3,1

Le résultat obtenu à la température d'ébullition sous la pression atmosphérique est parfaitement d'accord avec celui de Regnault; car on ne saurait prétendre à déterminer ou à calculer L à $\frac{1}{1000}$ près. Les écarts à 60° et à 100°, plus faibles que dans le cas de l'éther, étant de signes contraires, la remarque faite au sujet de l'équation (4) nous permet d'imputer, cette fois, une part importante de ces écarts à $\frac{dF}{dT}$.

ART VÉTÉRINAIRE. — *Traitement de la lymphangite ulcéreuse du cheval par la bactériothérapie.* Note de M. C. Truche, présentée par M. Laveran.

Ainsi que dans toutes les guerres, les chevaux de notre cavalerie ont été fort éprouvés par les épidémies dans la guerre actuelle.

Grâce au dévouement et à la science de nos vétérinaires, on est arrivé à juguler la plus redoutable de ces maladies, la morve.

Mais il est d'autres affections, moins graves en apparence, qui se sont généralisées dans nos effectifs, apportant ainsi un trouble sérieux dans le service, nous voulons parler des lymphangites.

Ces affections immobilisent les animaux pour de longs mois, nécessitent des soins continuels, laissent quelquefois des tares fonctionnelles très graves, pouvant même conduire à l'abatage.

Deux formes principales sont connues actuellement : la lymphangite épizootique ou à cryptocoque et la lymphangite ulcéreuse.

La première a été importée en France par les chevaux venus de l'Afrique du Nord, c'est presque une nouveauté pour nous.

La deuxième est bien connue dans nos régions, surtout depuis les travaux de Preisz et de Nocard qui ont découvert simultanément le bacille et fait connaître les différentes modalités des affections qui en relèvent.

Elle atteint tous nos animaux domestiques, ainsi que l'ont établi les travaux de Carré, Panisset, M. Nicolle, Loiseau et Forgeot, Forgeot et Césari.

Le bacille de Preisz-Nocard ressemble morphologiquement au bacille diphtérique. Il donne comme lui une toxine, pousse en voile sur le bouillon Martin et son milieu d'élection pour l'isolement est le sérum coagulé. Cependant, après quelques repiquages, il s'entraîne facilement à donner de belles cultures sur gélose-pomme de terre.

Amené par d'autres recherches à étudier les propriétés des microbes tués par le mélange alcool-éther, nous avons pensé qu'il serait peut-être intéressant d'essayer leur action bactériothérapique dans la lymphangite ulcéreuse.

Bien nous en a pris, car les résultats obtenus jusqu'à présent nous paraissent encourageants.

On ensemence des boîtes de Roux avec les bacilles cultivés sur sérum coagulé. La récolte sur la gélose-pomme de terre des boîtes est émulsionnée, après 24 heures d'étuve à 37°, dans de l'eau physiologique. On centrifuge à l'appareil de Jouan et l'on tue les germes en ajoutant parties égales d'alcool et d'éther. On laisse en contact une nuit, après quoi on décante et l'on dessèche à l'étuve ou au vide sulfurique.

On constitue ainsi une notable provision de microbes qui permet de préparer le vaccin au fur et à mesure des besoins. Pour ce faire, on émulsionne la poudre ainsi obtenue avec de l'eau physiologique, on chauffe 2 minutes à 100° et c'est cette émulsion qu'on injecte au cheval sous la peau de l'encolure.

L'injection est bien supportée, la réaction thermique est très faible 0°,5 à 1°; la réaction générale est nulle, l'appétit est conservé et toutes les autres fonctions restent normales.

Il se forme un petit œdème au point d'inoculation, mais il disparaît en 1 ou 2 jours. Le nombre d'injections nécessaire est variable, suivant la gravité et l'ancienneté de l'infection : en général deux à trois suffisent, une quatrième est parfois nécessaire, mais rarement.

Les soins locaux ne sont pas exclus et consistent en lavages antiseptiques et badigeonnages à la teinture d'iode.

Dès la première injection, vers le quatrième jour on voit les boutons se dessécher et les cordes s'affaisser. Après les deuxième et troisième inoculations l'amélioration, est manifeste, le membre reprend sa mobilité et la peau redevient normale.

Souvent après les traitements habituels on obtenait une apparence de guérison, puis au bout de quelque temps survenaient des récidives. Chez les animaux guéris depuis des mois (un même depuis 1 an) grâce au traite-

ment bactériothérapique, aucun fait de ce genre ne s'est produit. De plus on n'a jamais de ces « grosses jambes » (éléphantiasis) qui restaient une grande gêne pour les animaux. Les sujets que nous avons traités et guéris font à Paris un service de voitures de place très pénible, sans aucune trace de leur ancienne affection.

En résumé, nous avons là un traitement simple, pratique, peu coûteux qui permettra de libérer nos hôpitaux vétérinaires d'un grand nombre d'indisponibles qui sont une réelle charge pour le budget.

CHIRURGIE. — *Sur un traitement des plaies infectées.* Note de M. **Ratynski**, présentée par M. Dastre.

I. Depuis le mois de mai 1916, nous avons employé méthodiquement les préparations savonneuses, par lavages et par applications de pansements rendus poreux par la mousse, au traitement des plaies de guerre infectées. Les brûlures larges, les grands délabrements anfractueux, les écrasements, arrachements, fractures compliquées, les arthrites ouvertes, les suites opératoires de débridements, d'amputations, de résections, ont été soumis, dans notre service, aux irrigations et pansements savonneux.

Résultats : 1° chute de l'hyperthermie; 2° détersion équivalant à la meilleure toilette opératoire en 4 ou 6 jours; 3° sédation de la douleur dès les premières applications; 4° enfin, l'œdème, les lymphangites, les réactions inflammatoires périphériques disparaissent, la plaie prend un aspect sain, la cicatrisation et la guérison suivent rapidement.

II. L'étude des savons au point de vue de leur pouvoir antiseptique a fait l'objet de nombreux travaux qui manquent de précision et de concordance dans les résultats, parce que les conditions expérimentales ont été mal déterminées, les auteurs n'ayant pas fait connaître la composition chimique des produits employés [1].

---

[1] Koch crut avoir démontré que si le savon paraît très bactéricide pour le bacille du charbon, il est au contraire absolument impuissant contre le bacille typhique et le bacille du choléra; les résultats de ces expériences furent en partie confirmés par Di Mattee, mais en partie combattus par les observations de Nyland, de Max Iolles; les travaux de Behring, les recherches de Reythoffer et de Riodet sur ces mêmes bacilles, le *Bacterium coli* et les staphylocoques ont fixé la durée de résistance de ces divers bacilles qui est fonction de la concentration, de la composition chimique des solutions de savon, et en particulier de leur teneur en alcali.

La conclusion de cet ensemble d'expériences est que le savon présente vis-à-vis des germes qui nous intéressent un pouvoir bactéricide faible.

III. Les exsudats des plaies de guerre après lavages et irrigations et les compresses des pansements se montrent assez riches en nombre de germes, mais pauvres en espèces. Nous n'avons pu isoler que rarement le staphylocoque ou le *B. coli*, exceptionnellement le protéus; nous avons, par contre, toujours trouvé le B. pyocyanique en prédominance marquée et parfois exclusive; en particulier, à la surface même de la plaie, on ne retrouve que le pyocyanique.

Nous avons étudié la solution du savon que nous employons comme milieu de culture et comme bactéricide. La solution par elle-même est stérile et reste stérile. En l'ensemençant avec du *B. coli*, du staphylocoque *amens* du B. typhique, du B. pyocyanique, du protéus, du pus ordinaire, les cultures apparaissent plus ou moins abondantes; les microorganismes de l'eau de Seine ensemencée, non plus que le staphylocoque, ne cultivent pas.

Nous considérons donc comme très faible ou presque nul le pouvoir bactéricide de notre savon sur les germes pyogènes; il ne s'exerce sensiblement que sur les microbes fragiles, comme le staphylocoque, ou sur les milieux ne renfermant qu'un petit nombre de germes, bien dissociés, tels que l'eau de Seine.

IV. Et cependant, dans l'ordre clinique, cette absence de pouvoir antiseptique n'a pas d'inconvénient au point de vue de l'évolution et de la guérison des plaies qui guérissent rapidement sans phénomène septique d'aucune sorte.

C'est qu'il existe dans les plaies de guerre une double source d'empoisonnement pour l'organisme : la prolifération des germes septiques d'une part, et la putréfaction des tissus lésés d'autre part.

Le véritable danger vient de la plaie elle-même autant et plus même que du micro-organisme qui l'habite; ce danger étant démasqué et admis, les efforts du chirurgien doivent avoir pour but de le combattre.

V. Il faut donc nettoyer la plaie plutôt encore que la désinfecter ou la stériliser et, avant tout, la débarrasser de ses débris putréfiés, de ses albumines frappés de nécrobiose, qui empoisonnent l'organisme par leurs produits (cénotoxie de Weinberg).

D'ailleurs ces produits offrent aux bactéries les meilleures conditions de

prolifération et de protection. Toutes les ressources de la thérapeutique doivent tendre vers ce but : activer la lyse, la destruction et l'élimination des produits nécrobiotiques plutôt que de s'acharner contre le microbe.

On comprend ainsi l'utilité d'un agent thérapeutique qui, par son action physico-chimique, puisse attaquer, dissocier, désagréger ou détruire les albumines décomposées. Les solutions alcalines répondent à ces desiderata; les résultats chimiques, que nous avons obtenus par l'emploi des solutions savonneuses, nous ont convaincus qu'elles jouissent de propriétés de nettoyage incomparables.

Grâce à M. Bonjean, chimiste-chef du laboratoire et Membre du Conseil supérieur d'Hygiène, nous avons pu reconnaître que nos solutions ne sont ni irritantes ni agressives pour les tissus vivants, qu'elles sont sycophylactiques; qu'elles ne coagulent pas le sang, qu'elles dissolvent et fluidifient les caillots, qu'elles dissocient les débris de tissus sphacelés, même durcis, et qu'enfin elles forment avec le pus une viscosité filante, glaireuse.

Toutes ces constatations expliquent le mécanisme de l'élimination par les lavages avec solution de savon.

Mais un phénomène de dialyse que nous avons constaté expérimentalement, intervient aussi; le savon, en présence des tissus sains, ou en réaction congestive, fait appel au sel du sérum sanguin et établit ainsi un courant exosmotique, une sorte de drainage du dedans au dehors, d'humeurs qui, en outre de l'action mécanique qu'elles exercent, jouissent vraisemblablement de facultés bactéricides.

Enfin, l'expérience nous a montré que sous l'effet de l'acide carbonique de l'organisme, émanant de la région congestionnée phériphérique, au contact intime des tissus de la plaie, la matière grasse du savon est mise en liberté à l'état colloïdal et contribue à l'action détersive du savon et aussi à la sédation de la douleur.

VI. Dans divers Mémoires, nous avons développé les renseignements relatifs à la composition chimique des savons dont l'emploi donne les meilleurs résultats, les méthodes employées pour en préparer des solutions aseptiques, la description des compresses savonneuses de pansement, la technique de la méthode, la description des expériences, et enfin les principales observations que nous avons recueillies.

La simplicité de toute cette technique et de la méthode elle-même, qui est une des conditions primordiales du succès, explique en partie les

résultats obtenus ; nous nous estimerons heureux si nous avons pu répondre, même dans une faible mesure, à cet appel de M. Dastre : « Le plus grand progrès que pourra réaliser le chirurgien d'armée sera le pansement précoce, ou plutôt le nettoyage opératoire précoce des plaies. Une organisation qui réaliserait cette rapidité d'intervention rendrait des services incalculables. »

M. **Albert Nodon** adresse une Note intitulée : *Observations sur la période froide de janvier-février* 1917.

M. **G.-H. Niewenglowski** adresse un Note intitulée : *Imperméabilisation rapide et économique des vêtements et chaussures militaires.* (Présenté par M. Dastre, en la séance du 5 mars 1917.)

A 16 heures et quart l'Académie se forme en Comité secret.

La séance est levée à 17 heures et quart.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans les séances de décembre 1916 (*suite et fin*).

Albert de Saint-Germain, doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Caen (1839-1914), par Edmond Villey. Extrait des *Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles-lettres de Caen* (1916). 1 fasc. in-8°.

Annales de l'Institut océanographique, t. VII, fasc. VI : *La larve de l'*Ostrea eudlis *L.*, par J.-L. Dantan. Paris, Masson, 1916; 1 fasc. in-4°.

L'expédition scientifique pour l'exploration des pêcheries de la côte mourmane. Recherches sur les microbes de l'océan glacial arctique, par B.-L. Issatchenko. Petrograd, 1914; 1 vol. in-4°. (Ouvrage écrit en langue russe.)

Abbozzi di filosofia umana, par Natale Cifarelli. Bari, Società barese, 1913; 1 vol. in-8°.

Rapport sommaire de la division des mines du Ministère des Mines pour l'année terminée le 31 *décembre* 1914. Ottawa, J. de L. Taché, 1916; 1 vol. in-8°.

Canada, Ministère des Mines, division des mines. *Rapport sur les pierres de construction et d'ornement du Canada;* Vol. III : *Province de Québec*, par Wm A. Parks. Ottawa, Imprimerie du Gouvernement, 1916; 1 vol. in-8°.

Canada, Ministère des Mines, Geological Survey. Memoir 86 : *Iroquois Foods and Food Preparation*, by F. W. Waugh; — Memoir 90 : *Time Perspective in Aboriginal american Culture, a Study in Method*, by E. Sapir. Ottawa, Government Printing Bureau, 1916; 2 vol. in-8°.

A numerical classification of photography. Issued by the research laboratory Eastman Kodak Co. Rochester, N. Y., 1916; 1 fasc.

El Colargol en las infecciones graves de la infancia; — Tratamiento medico de la paralisis infantil, por el Dr Genaro Giacobini. Buenos-Aires, José Tragant, 1916; 2 fasc. in-4°.

Catalogue des écrits académiques suisses, 1914-1915 et 1915-1916. Basel, Schweighauserische Buchdruckerei, 1915 et 1916; 2 fasc. in-8°.

Ouvrages reçus dans les séances de janvier 1917.

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz; neue Folge, XLVI. Lieferung, des ganzen Werkes 76. Lieferung, I. Abteilung : *Zur Tektonik der südöstlichen Schweizeralpen*, von Rudolf Staub. Bern, Francke, 1916; 1 fasc. in-4°. (Présenté par M. Pierre Termier.)

Études de Lépidoptérologie comparée, par Charles Oberthür, fasc. XII (texte) et fasc. XII (2e partie) (planches). Rennes, Oberthür, 1916; 2 vol. in-8°. (Présenté par M. Bouvier.)

Nye basismaalinger i Danmark, udgivet af V. H. O. Madsen, bearbejdet af M. J. Sand. Copenhague, Bianco Lunos, 1916; 1 vol. in-4°. (Présenté par M. Lallemand.)

Résultats des campagnes scientifiques, accomplies sur son yacht par Albert Ier, prince souverain de Monaco, publiés sous la direction et avec le concours de M. Jules Richard; fasc. XLVIII : *Annélides polychètes pélagiques provenant des campagnes des yachts « Hirondelle » et « Princesse-Alice »* (1885-1910), par Pierre Fauvel; — fasc. XLIX : *Chétognathes provenant des campagnes des yachts « Hirondelle » et « Princesse-Alice »* (1885-1910), par L. Germain et L. Joubin. Imprimerie de Monaco, 1916; 2 vol. in-4°. (Présenté par S. A. S. le prince de Monaco.)

Estudos de análise espectral realizado sôbre os minerais de urânio e de zircónio portuguêses, por António-Augusto-Alvares Pereira de Sampaio Forjaz Pimentel. Separata dos Arquivos da Universidade de Lisboa, vol. III. Lisboa, 1916; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. de Gramont.)

The organism as a whole, by Jacques Loeb. New-York-London. Putnam's Sons, 1916; 1 vol. in-8°.

Jac. Berzelius bref, II : 2, publiées au nom de l'Académie royale des Sciences de Suède, par H. G. Söderbaum. Tome V : *Correspondance entre Berzelius et G. J. Mulder* (1834-1847). Upsala, Almquist et Wiksells, 1916; 1 vol. in-8°.

Philosophie des structures dans l'architecture et dans l'art de l'ingénieur, par Félix Cardellach, traduit de l'espagnol par Léon Jaussely. Paris, Dunod et Pinat, 1914; 1 vol. in-8°.

Le sol et les populations de la Lorraine et des Ardennes, par le commandant Chenet. Paris, Édouard Champion, 1916; 1 vol. in-8°.

Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications, par R. de Montessus de Ballore. Paris, Gauthier-Villars, 1917; 1 vol. in-8°. (Présenté par M. Appell.)

Étude sur la chronologie assyro-babylonienne, par M. D. Sidersky. Extrait des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, t. XIII. Paris, Imprimerie nationale, 1916; 1 fasc. in-4°.

(*A suivre.*)